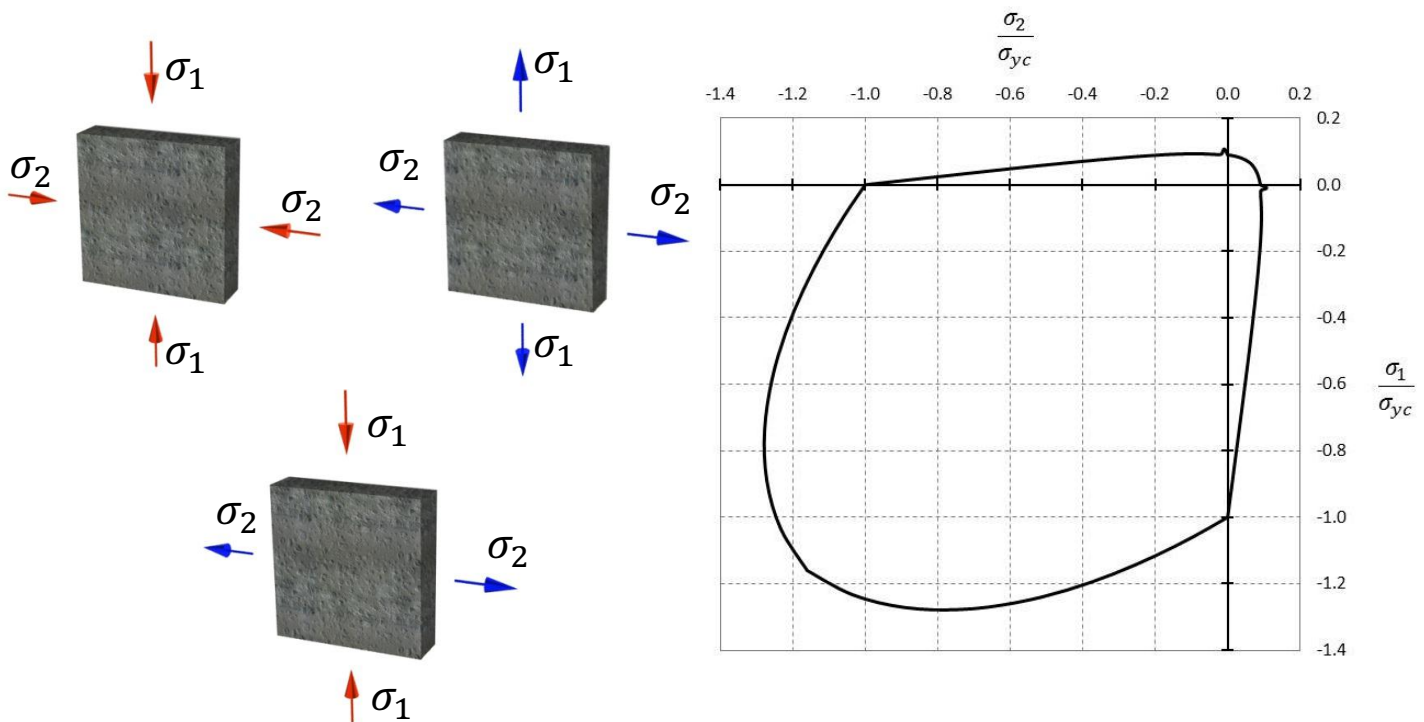


Modelación numérica del concreto simple con elementos finitos usando un modelo constitutivo de Plasticidad

Tesis de Maestría presentada por
Luis Enrique Rodríguez Fajardo



MODELACIÓN NUMÉRICA DEL CONCRETO SIMPLE CON ELEMENTOS FINITOS USANDO UN MODELO CONSTITUTIVO DE PLASTICIDAD

Tesis de Maestría presentada por:
Luis Enrique Rodríguez Fajardo

Dirigida por:
Ing. Dorian Luis Linero Segrera PhD.



Universidad Nacional de Colombia – Sede Bogotá
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola
Maestría en Estructuras
Bogotá D.C.
Mayo de 2011



A mis padres:

*por el apoyo y amor
que siempre nos transmiten.*

NOTAS DE ACEPTACIÓN

DIRECTOR DEL PROYECTO
Dorian Luis Linero Segrera

JURADO
Juan Manuel Lizarazo Marriaga

JURADO
José Ricardo Martínez Vargas

Bogotá, junio de 2011

Agradecimientos

Expreso mi gratitud al doctor Dorian Luis Linero Segrera, no solo por la dirección de esta tesis, si no por su constante apoyo en el desarrollo de todas las actividades académicas. Más que un tutor, el profesor Dorian ha sido siempre una fuente de motivación para seguir el camino interminable del aprendizaje.

Agradezco especialmente a todos los profesores que a lo largo de mi estancia en la universidad, han contribuido con el conocimiento y admiración por las estructuras. Quiero mencionar al ingeniero Lisandro Beltrán, a la ingeniera Caori Takeuchi, el ingeniero José Ricardo Martínez, el ingeniero Juan Manuel Lizarazo y el ingeniero Fernando Spinel quienes me transmitieron inicialmente el gusto por las estructuras. Este deleite fue luego enriquecido por los ingenieros Ismael Santana y Gabriel Valencia entre otros.

Quiero agradecer a mis compañeros de tesis Lina Andrea Herrera y Manuel Alejandro Caicedo por su constante apoyo e intercambio de ideas, sin las cuales no existiría este trabajo.

Agradezco en gran medida a Dios por mi familia, que me apoya incondicionalmente para alcanzar las metas propuestas.

Resumen

Los modelos de plasticidad tienen la capacidad de representar el comportamiento mecánico de materiales como el concreto, debido a que poseen una fundamentación matemática rigurosa, la cual es complementada con teorías provenientes de la experimentación, que en conjunto, le otorgan la posibilidad de predecir la respuesta mecánica de diversos materiales.

Esta tesis consiste en la modificación, implementación y validación del modelo constitutivo de plasticidad de (Hu y Schnobrich 1989) para concreto simple. La modificación realizada en esta tesis al modelo constitutivo, consistió en convertir el comportamiento elástico no lineal inicial en un comportamiento elástico lineal. Adicionalmente la formulación se cambió de un formato explícito de cálculo a un formato implícito iterativo. Para lograr esto, se enmarcó el modelo constitutivo en el método de los elementos finitos, para garantizar el equilibrio durante los procesos de carga.

La implementación se realizó en el programa HYPLAS de análisis no lineal con el método de los finitos. Este proceso se realizó incluyendo nuevas rutinas de cálculo para el modelo constitutivo.

La validación se realizó comparando los resultados obtenidos numéricamente del modelo implementado, con resultados experimentales de (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969) y con resultados de otros modelos constitutivos.

Abstract

Plasticity models have the ability to represent the mechanical behavior of materials like concrete because they have a rigorous mathematical foundation, which is complemented with theories from experimentation. This aspects together give the possibility to predict the mechanical response of different materials.

This thesis is the modification, implementation and validation of the constitutive plasticity model (Hu y Schnobrich 1989) for plain concrete. The modification made in this thesis to the constitutive model was to make the initial nonlinear elastic behavior in a linear elastic behavior. Additionally, the formulation was changed from an explicit format to a implicit iterative format. To accomplish this, the constitutive model was framed in the finite element method, to ensure equilibrium during the loading processes.

The implementation was done in the program HYPLAS with nonlinear analysis with the finite method. This process was carried out including new routines for calculating the constitutive model.

The validation was performed by comparing the results obtained numerically with experimental results given by (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969) and comparing with results from other constitutive models.

Contenido

| | |
|--|----|
| Capítulo 1 Introducción..... | 1 |
| 1.1. Justificación..... | 2 |
| 1.2. Objetivos | 3 |
| 1.2.1. Objetivo General..... | 3 |
| 1.2.2. Objetivos específicos | 3 |
| 1.3. Contenido del documento | 3 |
| Capítulo 2 Teoría de la plasticidad..... | 5 |
| 2.1. Aspectos físicos..... | 5 |
| 2.2. Plasticidad unidimensional..... | 7 |
| 2.2.1. Función de fluencia..... | 9 |
| 2.2.2. Ley de endurecimiento..... | 10 |
| 2.2.3. Módulo tangente Elasto – Plástico..... | 11 |
| 2.2.4. Efecto Bauschinger..... | 12 |
| 2.2.5. Algoritmo de integración..... | 13 |
| 2.3. Motivación: Modelación numérica de armaduras con material elasto – plástico. 15 | |
| 2.4. Elasto plasticidad 3 – D..... | 22 |
| Capítulo 3 Plasticidad para el concreto | 25 |
| 3.1. Comportamiento mecánico del concreto..... | 25 |
| 3.2. Modelos de plasticidad para el concreto | 27 |
| 3.2.1. Modelo de Ottosen..... | 28 |
| 3.2.2. Modelo de Hsieh – Ting – Chen..... | 30 |
| 3.2.3. Modelo de William – Warnke | 32 |
| 3.2.4. Modelo de Hsuan-Teh Hu y William C. Schnobrich..... | 34 |
| 3.2.5. Otros modelos..... | 34 |
| Capítulo 4 Formulación del modelo constitutivo | 35 |

| | | |
|-------------------|---|-----|
| 4.1. | Preliminares | 35 |
| 4.2. | Función de fluencia..... | 36 |
| 4.2.1. | Función de fluencia en tensión biaxial | 38 |
| 4.2.2. | Función de fluencia en tensión – compresión..... | 39 |
| 4.2.3. | Función de fluencia en compresión biaxial | 39 |
| 4.3. | Reglas de flujo | 40 |
| 4.4. | Curva uniaxial equivalente esfuerzo – deformación..... | 41 |
| 4.5. | Módulo de endurecimiento plástico..... | 45 |
| 4.6. | Ecuaciones constitutivas para el concreto..... | 46 |
| Capítulo 5 | Implementación del modelo constitutivo | 55 |
| 5.1. | Método de los elementos finitos | 55 |
| 5.1.1. | Método de Newton – Raphson | 61 |
| 5.1.2. | Método de Longitud de Arco..... | 63 |
| 5.2. | Programa GiD | 65 |
| 5.2.1. | Pre proceso..... | 65 |
| 5.2.1. | Post proceso | 65 |
| 5.3. | Programa HYPLAS..... | 66 |
| 5.3.1. | Entrada de datos e inicialización | 67 |
| 5.3.2. | Procedimiento incremental con elementos finitos..... | 70 |
| 5.4. | Adecuación del modelo constitutivo..... | 74 |
| 5.4.1. | Comportamiento elástico lineal inicial | 75 |
| 5.4.2. | Formulación implícita iterativa..... | 76 |
| 5.5. | Implementación..... | 78 |
| 5.5.1. | Rutina de actualización de esfuerzos y variables históricas. | 78 |
| 5.5.2. | Rutina para el cálculo de tensor constitutivo tangente. | 96 |
| Capítulo 6 | Validación del modelo constitutivo | 105 |
| 6.1. | Ensayos de laboratorio | 105 |
| 6.2. | Simulación numérica..... | 109 |
| 6.2.1. | Propiedades mecánicas de la simulación..... | 109 |
| 6.2.2. | Probeta sometida a compresión biaxial | 110 |
| 6.2.3. | Probeta sometida a tensión - compresión | 113 |
| 6.2.4. | Probeta sometida a tensión biaxial | 114 |
| 6.2.5. | Probeta sometida a ciclos de carga y descarga | 117 |
| 6.2.6. | Ejemplo de aplicación: viga en voladizo | 121 |
| 6.3. | Comparación entre modelos de plasticidad | 131 |
| Capítulo 7 | Conclusiones y recomendaciones | 133 |
| 7.1. | Conclusiones | 133 |
| 7.2. | Recomendaciones..... | 134 |
| Bibliografía..... | | 137 |
| Anexo A | Archivos de datos de entrada..... | 139 |
| • | Probeta sometida a compresión biaxial | 139 |

| | |
|---|-----|
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = -1 - 1$, σ_1 vs. ε_1 | 139 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = -1 - 1$, σ_1 vs. ε_2 | 140 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = -1 - 0.52$, σ_1 vs. ε_1 | 142 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = -1 - 0.52$, σ_1 vs. ε_2 | 143 |
| • Probeta sometida a tensión – compresión..... | 145 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = -10.052$, σ_1 vs. ε_1 | 145 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = -10.052$, σ_1 vs. ε_2 | 146 |
| • Probeta sometida a tensión biaxial..... | 148 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = 11$, σ_1 vs. ε_1 | 148 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = 11$, σ_1 vs. ε_2 | 149 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = 10.55$, σ_1 vs. ε_1 | 150 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = 10.55$, σ_1 vs. ε_2 | 152 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = 10$, σ_1 vs. ε_1 | 153 |
| • Probeta con $\sigma_1\sigma_2 = 10$, σ_1 vs. ε_2 | 154 |
| • Viga en voladizo con carga puntual en el extremo | 156 |
| Anexo B Implementación de armaduras planas con plasticidad en programa PEFiCA | |
| 159 | |
| • Diagrama de flujo | 159 |
| • Rutina principal de cálculo | 162 |
| • Rutina del modelo constitutivo | 168 |

Índice de Tablas

| | |
|--|-----|
| Tabla 3-1: Parámetros para el modelo, (Ottosen 1977)..... | 29 |
| Tabla 3-2: Parámetros para el modelo, (Hsieh, Ting y Chen 1982)..... | 31 |
| Tabla 3-3: Parámetros para el modelo de (William y Warnke 1975)..... | 33 |
| Tabla 5-1: Rutina SUCOPL..... | 83 |
| Tabla 5-2: Rutina TRPRIN para cálculo de esfuerzos principales..... | 94 |
| Tabla 5-3: Rutina FUNSY para cálculo de esfuerzo uniaxial equivalente σ | 95 |
| Tabla 5-4: Rutina CTCOPL para cálculo de tensor constitutivo tangente | 96 |
| Tabla 5-5: Rutina ETAN para cálculo de módulo tangente uniaxila equivalente. | 100 |
| Tabla 5-6: Rutinas para operar matrices y vectores | 101 |
| Tabla 6-1: Ensayos realizados | 108 |

Índice de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1-1: Proceso de modelación. (Stewart 1998)..... | 1 |
| Figura 2-1: Ensayo experimental uniaxial de un material dúctil. a) Historia de carga b) Curva esfuerzo – deformación. | 6 |
| Figura 2-2: Modelo matemático de plasticidad unidimensional. | 7 |
| Figura 2-3: Relaciones esfuerzo deformación elasto – plásticas: a) Bilineal b) Elástico lineal y plástico no lineal c) Elástico no lineal y plástico no lineal. | 8 |
| Figura 2-4: Curva de endurecimiento. Modelo unidimensional..... | 11 |
| Figura 2-5: Efecto Bauschinger. (Simo y Hughes 1998) | 12 |
| Figura 2-6: Sólido con comportamiento elasto – plástico..... | 13 |
| Figura 2-7: Algoritmo de integración con endurecimiento isótropo | 14 |
| Figura 2-8: Ejemplo de barra con material elasto-plástico sometida a tensión..... | 17 |
| Figura 2-9: Curvas Fuerza – Desplazamiento y Esfuerzo – Deformación de una barra cargada axialmente en un proceso de cargas, descargas y recargas..... | 18 |
| Figura 2-10: Ejemplo de cercha con material elasto-plástico | 19 |
| Figura 2-11: Esfuerzos en las barras como una fracción del mayor | 19 |
| Figura 2-12: Curva carga – desplazamiento en el nudo 2 y dirección Y, cercha con material elasto-plástico. | 20 |
| Figura 2-13: Curvas esfuerzo – deformación de cada elemento de la cercha con material elasto-plástico..... | 21 |
| Figura 3-1: Curvas esfuerzo – deformación del concreto simple. a) Rango de compresión uniaxial | 26 |
| Figura 3-2: Sección de la superficie de fluencia en un plano desviador. (Chen y Han 2007) | 29 |
| Figura 3-3: Modelo de Ottosen vs. resultados experimentales, (Chen y Han 2007)..... | 30 |
| Figura 3-4: Modelo de Hsieh – Ting – Chen con resultados experimentales, (Chen y Han 2007)..... | 31 |
| Figura 3-5: Modelo de Hsieh – Ting – Chen en un plano desviador, (Chen y Han 2007) | 32 |
| Figura 3-6: Modelo de William y Warnke, (Chen y Han 2007) | 33 |
| Figura 3-7: Modelo de William y Warnke en un plano desviador, (Chen y Han 2007) | 34 |
| Figura 4-1: Superficie de fluencia | 37 |
| Figura 4-2: Evolución de la superficie de fluencia. a) Representación en el espacio de los esfuerzos principales. b) representación por medio del esfuerzo uniaxial equivalente.... | 38 |

| | |
|---|-----|
| Figura 4-3: Curva uniaxial equivalente esfuerzo – deformación para compresión biaxial y tensión – compresión..... | 43 |
| Figura 4-4: Curva uniaxial equivalente esfuerzo – deformación del modelo implementado..... | 44 |
| Figura 5-1: Discretización de un medio por medio de elementos finitos..... | 56 |
| Figura 5-2: Gráfica idealizada para ecuación de equilibrio..... | 59 |
| Figura 5-3: Proceso de convergencia en cada paso de carga..... | 60 |
| Figura 5-4: Respuesta estructural. | 61 |
| Figura 5-5: Representación gráfica del método de Newton – Raphson. | 62 |
| Figura 5-6: Representación gráfica del método de Newton – Raphson modificado..... | 63 |
| Figura 5-7: Método de longitud de arco cilíndrico. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008) | 64 |
| Figura 5-8: Procedimiento de análisis usando los programas Gid y HYPLAS..... | 66 |
| Figura 5-9: Rutina de entrada e inicialización de datos. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008) | 67 |
| Figura 5-10: Ejemplo de archivo de entrada de datos para programa HYPLAS. | 69 |
| Figura 5-11: Ciclo de incrementos de carga, método de Newton – Raphson. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)..... | 71 |
| Figura 5-12: Ciclo de incrementos de carga, método de longitud de arco. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)..... | 72 |
| Figura 5-13: Modulación material y elemental, Cálculo de fuerza interna. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)..... | 73 |
| Figura 5-14: Cálculo del módulo tangente. (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008) | 74 |
| Figura 5-15: Curva esfuerzo – deformación uniaxial equivalente modificada del modelo implementado..... | 76 |
| Figura 5-16: Representación gráfica del algoritmo de retorno para el modelo implementado..... | 77 |
| Figura 5-17: Esquema general de la implementación del modelo. Cálculo del esfuerzo, la deformación y deformación plástica equivalente. Rutina SUCOPL..... | 81 |
| Figura 5-18: Sub rutina para el cálculo del incremento del multiplicados plástico. | 82 |
| Figura 6-1: Probetas sometidas a diferentes estados de esfuerzo plano..... | 106 |
| Figura 6-2: Sistema hidráulico para ensayo de probetas. (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969) | 106 |
| Figura 6-3: Curvas de esfuerzo – deformación uniaxial equivalentes. | 110 |
| Figura 6-4: Modelo numérico de losa sometida a compresión biaxial..... | 111 |
| Figura 6-5: Curvas esfuerzo deformación de losa sometida a compresión biaxial. Resultados numéricos y experimentales. | 112 |
| Figura 6-6: Modelo numérico de losa sometida a compresión – tensión..... | 113 |
| Figura 6-7: Curvas esfuerzo deformación de losa sometida a tensión – compresión. Resultados numéricos y experimentales. | 114 |

| | |
|--|-----|
| Figura 6-8: Modelo numérico de losa sometida a tensión biaxial..... | 114 |
| Figura 6-9: Curvas esfuerzo deformación de losa sometida a tensión biaxial. Resultados numéricos y experimentales..... | 116 |
| Figura 6-10: Historia de carga biaxial cíclica. | 117 |
| Figura 6-11: Losa sometida a ciclos de carga, descarga y recarga..... | 118 |
| Figura 6-12: Deformación plástica equivalente ϵ_p , en losa sometida a ciclos de carga, descarga y recarga..... | 120 |
| Figura 6-13: Viga en voladizo con carga puntual en el extremo..... | 121 |
| Figura 6-14: Viga en voladizo con carga puntual en el extremo. Historia de carga | 121 |
| Figura 6-15: Curvas de esfuerzo – deformación uniaxial equivalentes. | 123 |
| Figura 6-16: Modelo numérico viga en voladizo con carga puntual en el extremo..... | 124 |
| Figura 6-17: Carga – desplazamiento en el extremo de la viga (Resultados numéricos) | 125 |
| Figura 6-18: Esfuerzo normal σ_x viga en voladizo con carga puntual en el extremo. . | 126 |
| Figura 6-19: Deformación plástica equivalente ϵ_p , viga en voladizo con carga puntual en el extremo..... | 128 |
| Figura 6-20: Deformación plástica equivalente viga en voladizo con carga puntual en el extremo..... | 130 |
| Figura 6-21: Curvas esfuerzo – deformación viga en voladizo con carga puntual en el extremo..... | 131 |
| Figura 6-22: Comparación de resultados experimentales (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969), numéricos del modelo implementado (Hu y Schnobrich 1989), Modelo de plasticidad de Von Mises y Modelo de Tresca. | 132 |
| Figura B-1: Diagrama de flujo rutina de análisis no lineal para armaduras planas con material elasto – plástico bilineal con endurecimiento isótropo. | 161 |

Capítulo 1

Introducción

Desde el comienzo de la historia de la humanidad, el hombre ha construido estructuras para resguardarse, extender sus fronteras y dejar un legado sobre la tierra. Es una vasta experiencia la que se acumula en miles de años de empirismo, investigación y desarrollo, lo cual se traduce hoy en día en gran conocimiento sobre el comportamiento de los materiales.

El concreto es tan solo un segmento en esa larga línea del tiempo en que el hombre ha construido usando los recursos del planeta. Sin embargo, éste material es símbolo de un gran desarrollo en la infraestructura de la humanidad y le ha permitido continuar en su continuo aprendizaje sobre materiales.

En este trabajo se utiliza una teoría en el marco de la mecánica del medio continuo desarrollada y mejorada a través de los años para entender, reproducir y predecir el comportamiento del concreto. Es la teoría de la plasticidad una de las más soportadas desde el punto de vista matemático, la cual representa de forma muy acertada el comportamiento real de muchos materiales usados en las construcciones.

El avance de la tecnología computacional ha permitido aprender y avanzar en el análisis de estructuras con diferentes materiales. La modelación numérica de los materiales usando la capacidad de procesamiento que tienen los computadores, constituye una gran herramienta de análisis y diseño.

El proceso de modelado se puede resumir en el esquema de la **Figura 1-1**.

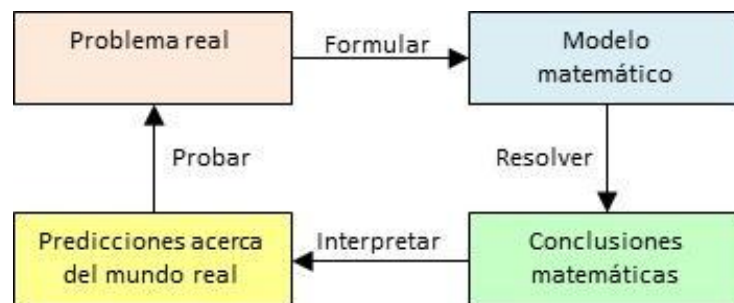


Figura 1-1: Proceso de modelación. (Stewart 1998)

1.1. Justificación

Los modelos numéricos no sustituyen la experimentación de los modelos físicos, sin embargo para realizar estos últimos es útil la modelación numérica con el fin de pre dimensionar los ensayos y predecir los resultados.

La modelación numérica es un instrumento útil en el análisis y evaluación de estructuras existentes. Permite determinar causas de deformaciones, fisuras y/o colapso entre otros y establece las medidas correctivas. En el caso de construcciones antiguas cuyas formas y materiales dificultan un análisis convencional, la utilidad de estos modelos se torna más notoria.

En la actualidad las pruebas de laboratorio sólo se pueden llevar a límites que representen una estabilidad admisible para los equipos de medición garantizando así la conservación de los mismos, con la modelación numérica se puede obtener dicho comportamiento, llevándolo a su colapso usando los parámetros medidos experimentalmente.

Los modelos de plasticidad se basan en teorías claramente fundamentadas en desarrollos matemáticos consistentes, lo cual hace que funcionen como punto de partida para la formulación de nuevos modelos constitutivos, incluso de daño.

Esta tesis hace parte de una nueva línea de investigación en análisis numérico del comportamiento de materiales convencionales en la construcción civil y cual deberá ser complementada con investigaciones posteriores.

El concreto tiene deformaciones plásticas muy pequeñas comparadas con las que presentan materiales dúctiles como el acero, pero los modelos de plasticidad representan de manera adecuada las etapas de carga inelástica en este material.

Partiendo de lo anterior, resulta muy útil una herramienta computacional, para el análisis numérico no lineal del concreto simple, usando un modelo constitutivo de plasticidad. Adicionalmente esta herramienta es a código abierto, permitiendo en todo momento saber de qué manera está realizando los cálculos y poder determinar, con criterio, si el los problemas se están analizando de forma correcta. Se obtiene entonces una alternativa a los programas comerciales existentes, los cuales no permiten saber de qué manera se realizan los procesos.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Representar el comportamiento de estructuras de concreto simple mediante el análisis no lineal con elementos finitos considerando que el material obedece a un modelo constitutivo de plasticidad determinado.

1.2.2. Objetivos específicos

- Seleccionar los modelos constitutivos de plasticidad que representen adecuadamente el comportamiento mecánico de elementos estructurales de concreto simple.
- Implementar uno de los modelos constitutivos seleccionados en un programa de elementos finitos que realice análisis no lineal.
- Representar el comportamiento mecánico del concreto simple en rangos de carga y deformaciones para los cuales no es posible hacer mediciones mediante ensayos.

1.3. Contenido del documento

El presente documento esta ordenado en 7 capítulos. En el Capítulo 1 se presenta una introducción al tema de la plasticidad motivado con el desarrollo de un modelo de plasticidad unidimensional para armaduras planas.

El segundo capítulo contiene una mirada a la teoría de la Plasticidad, en este capítulo se hace un breve recorrido por la fenomenología física y teoría matemática de los modelos que representan los materiales elasto-plásticos.

En el tercer capítulo se encuentra una reseña de algunos modelos constitutivos de plasticidad formulados para representar el comportamiento del concreto simple. Este capítulo tiene por objeto el estudio de modelos de plasticidad para concreto con el fin de seleccionar uno de ellos para ser implementado con elementos finitos.

En el Capítulo 4 se seleccionó un modelo de los expuestos en el Capítulo 3 y se resume toda su formulación. El modelo seleccionado corresponde al propuesto por (Hu y Schnobrich 1989). En el Capítulo 5 se realiza la implementación de éste modelo en el programa de análisis no lineal con elementos finitos HYPLAS. En el Capítulo 5 se muestran también algunas modificaciones realizadas al modelo por parte del autor de este trabajo.

En el Capítulo 6 se realiza la validación del modelo implementado, se realizan varios ejemplos para comparar los resultados con datos obtenidos en ensayos de laboratorio realizados por (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969). Al final del Capítulo 6 también se realiza un ejemplo de aplicación usando el modelo para analizar el comportamiento de una viga en voladizo con carga puntual en el extremo.

Finalmente en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones y recomendaciones que deja este trabajo de investigación en el área de la mecánica computacional.

Capítulo 2

Teoría de la plasticidad

La teoría de la plasticidad provee un marco de trabajo para la descripción constitutiva en el continuo de una clase muy importante de materiales. Básicamente la teoría de la plasticidad concierne a sólidos, que luego de estar sometidos a procesos de carga, quedan sujetos a deformaciones permanentes luego de ser descargados completamente. (de Souza Neto, Peric y Owen 2008).

Un gran número de materiales usados y estudiados en la ingeniería cumplen con estas características, tales como el acero, el concreto, rocas, arcillas y suelos entre otros. (de Souza Neto, Peric y Owen 2008).

En este capítulo se presenta una breve reseña de los aspectos más destacables y aplicables a este trabajo.

2.1. Aspectos físicos

Materiales, desde un punto de vista cuantitativo, muy diferentes como los metales y los suelos, comparten algunas características de su comportamiento mecánico, las cuales hacen que sean susceptibles de ser analizados con modelos constitutivos de plasticidad. Las características mencionadas se pueden resumir en el ejemplo mostrado en la **Figura 2-1**.

En esta figura se muestra el comportamiento de un material dúctil, el cual es sometido a un proceso de carga axial. Inicialmente la carga tiene un valor de cero y luego se va incrementando hasta llegar al punto 1.

Desde el valor de cero hasta el punto 1 se observa un comportamiento elástico lineal, en el cual si la carga disminuye, la descarga se realiza por la misma línea hasta llegar nuevamente a esfuerzo y deformación cero.

Pero si la carga aumenta por encima del punto 1, se observa un cambio importante en la curva esfuerzo deformación. Del punto 1 al 2 la pendiente en la curva esfuerzo –

deformación, disminuye en forma considerable. Al llegar al punto 2 la carga decrece, la trayectoria de descarga en la **Figura 2-1 b** es paralela a la trayectoria desde cero hasta 1, pero al llegar al punto 3 se observa que ha quedado una deformación permanente.

La deformación permanente se denomina deformación plástica y queda presente en el material aun quitando por completo la carga.

De esta manera se han identificado dos características básicas que poseen los materiales que pueden ser modelados con la teoría de la plasticidad. El primero de ellos es el límite elástico, que separa el comportamiento elástico del comportamiento plástico. El segundo es la deformación plástica, que es una deformación permanente que queda en el material si éste ha sufrido un proceso de plastificación, es decir, el estado de esfuerzos a superado el límite elástico.

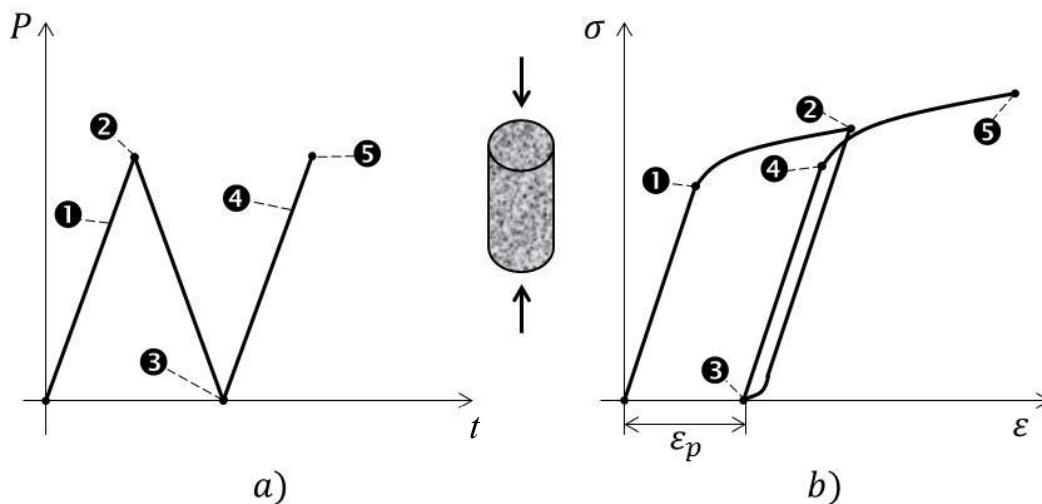


Figura 2-1: Ensayo experimental uniaxial de un material dúctil. a) Historia de carga b) Curva esfuerzo – deformación.

Si la carga se incrementa nuevamente en un proceso de recarga, nuevamente será superado el límite elástico pero no necesariamente con el mismo nivel de esfuerzo en el que sucedió la primera vez. El punto (4) puede estar más arriba (o más abajo) del punto (1) dependiendo de las propiedades del material en el rango plástico.

De esta observación se deduce otra característica presente en los materiales plásticos: el esfuerzo de fluencia presenta una evolución a lo largo de los procesos de carga, este fenómeno se denomina endurecimiento (ablandamiento).

Las tres características mencionadas no ocurren únicamente en materiales dúctiles, también están presentes en materiales como rocas y concreto.

Los materiales que presentan este tipo de comportamiento independientemente del tiempo de la aplicación de la carga, se denominan materiales plásticos o plásticos independientes del tiempo.

2.2. Plasticidad unidimensional

Para representar el comportamiento de un material como el que se analizó en el numeral anterior, se formula un modelo matemático simplificado de plasticidad unidimensional que contiene las tres características esenciales analizadas.

El modelo matemático describe el comportamiento como se muestran en la **Figura 2-2**. Esta gráfica esfuerzo – deformación es básicamente la misma que se observa en el comportamiento real del material pero se realizan algunos cambios: primero, la línea de descarga entre los puntos 2 y 3 coincide con la línea de recarga entre los puntos 3 y 4.

También se hace coincidir el punto 2 donde se inicia la descarga, con el punto 4 donde al recargar se presenta nuevamente la fluencia. En la curva resultante se observa al inicio una relación lineal elástica entre el esfuerzo y la deformación hasta el punto 1. En un caso general, el comportamiento en el rango elástico puede ser no lineal, es decir, el módulo de elasticidad E es variable en un proceso de carga elástica.

Si el esfuerzo continúa incrementándose, se supera el límite elástico en el punto 1 y comienza un proceso de carga plástica. Del punto 1 en adelante la relación entre el esfuerzo y la deformación ya no es elástica y puede tener una relación lineal o no lineal, según la variación del módulo elasto plástico E^{ep} .

Adicionalmente en el rango plástico, el comportamiento puede presentar endurecimiento o ablandamiento según el signo que tenga el módulo elasto plástico E^{ep} .

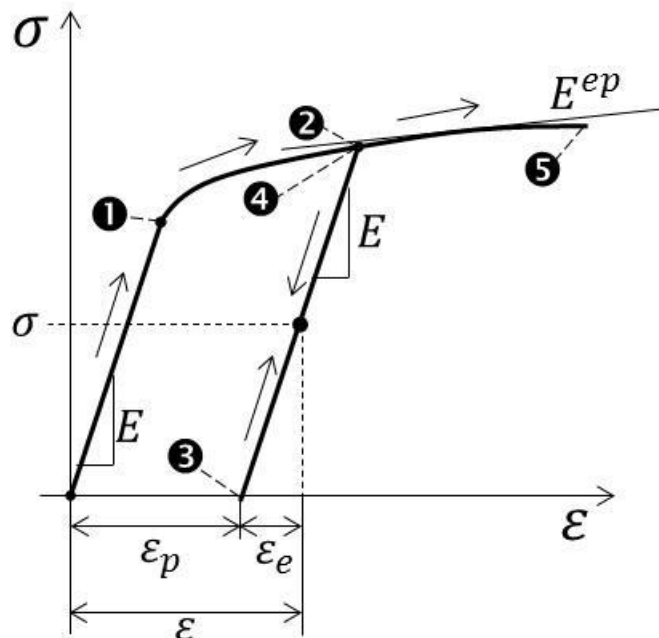


Figura 2-2: Modelo matemático de plasticidad unidimensional.

Si en el rango plástico se realiza una descarga, el comportamiento del material será nuevamente elástico y la trayectoria de descarga tendrá la misma pendiente E de la curva elástica. Si se descarga por completo, quedará presente una deformación permanente o deformación plástica ε_p .

Al realizar un proceso de recarga, en donde el esfuerzo se incrementa nuevamente, la trayectoria de carga será la misma de la de la descarga y en el punto 2 se alcanza nuevamente el esfuerzo de fluencia. Si el esfuerzo continúa incrementándose, se presentará nuevamente un proceso de carga plástica en donde se mantiene la pendiente E^{ep} que se tenía en el proceso de carga plástica anterior antes de la descarga.

En el caso particular en el cual el rango elástico y el rango plástico son lineales, se denomina comportamiento elasto plástico bilineal, **Figura 2-3 a)**. El modelo matemático también puede tener un rango elástico lineal y posteriormente un rango plástico no lineal, **Figura 2-3 b)** o ambos rangos no lineales, **Figura 2-3 c)**.

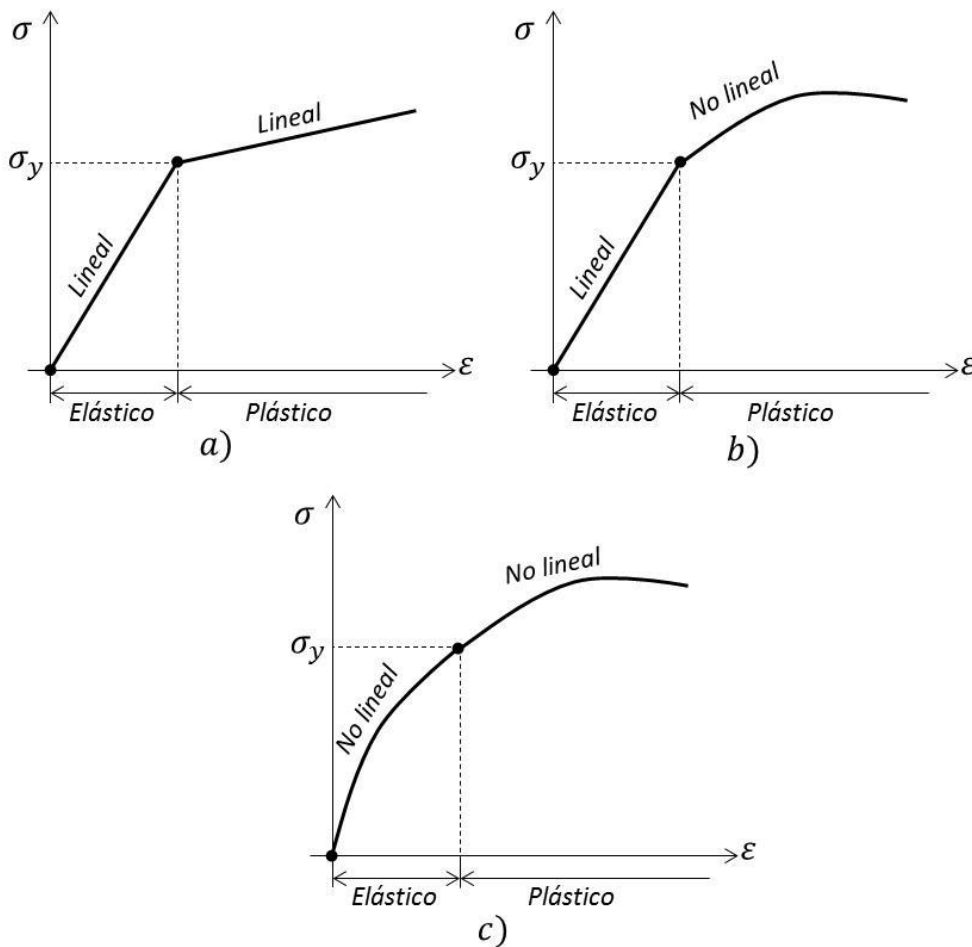


Figura 2-3: Relaciones esfuerzo deformación elasto – plásticas: a) Bilineal b) Elástico lineal y plástico no lineal c) Elástico no lineal y plástico no lineal.

Para un caso general se tiene la siguiente relación esfuerzo deformación para un estado posterior a la fluencia:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (2-1)$$

En este punto la deformación $\varepsilon - \varepsilon_p$ es recuperable, lo que permite escribir la deformación total como:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_e + \varepsilon_p \\ \varepsilon_e &= \varepsilon - \varepsilon_p \end{aligned} \quad (2-2)$$

Donde ε es la deformación total, ε_e es la componente elástica y ε_p es la componente plástica.

2.2.1. Función de fluencia

Existe un dominio elástico el cual está delimitado por el esfuerzo de fluencia σ_y , Esto se puede expresar matemáticamente mediante una función de fluencia de la forma:

$$f(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y \quad (2-3)$$

El dominio elástico estará definido para el caso unidimensional como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\sigma &= \{\sigma \mid f(\sigma, \sigma_y) < 0\} \\ |\sigma| &< \sigma_y \end{aligned} \quad (2-4)$$

Adicionalmente se debe tener en cuenta que cualquier esfuerzo que esté dentro del dominio elástico o en su contorno, no puede superar el esfuerzo de fluencia corriente. Esto define el estado admisible plástico:

$$f(\sigma, \sigma_y) \leq 0 \quad (2-5)$$

La deformación plástica solo se incrementará en el momento que ocurra un proceso de carga plástica, en los demás casos permanecerá constante.

$$\begin{aligned} \text{si } f(\sigma, \sigma_y) < 0 &\rightarrow \dot{\varepsilon}_p = 0 \rightarrow \text{Carga elástica} \\ \text{si } f(\sigma, \sigma_y) = 0 &\rightarrow \dot{\varepsilon}_p = 0 \rightarrow \text{Descarga elástica} \\ \text{si } f(\sigma, \sigma_y) = 0 &\rightarrow \dot{\varepsilon}_p \neq 0 \rightarrow \text{Carga plástica} \end{aligned} \quad (2-6)$$

La evolución de la deformación plástica $\dot{\varepsilon}_p$ estará dada por la regla de flujo plástico:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\gamma} \text{signo}(\sigma) \quad (2-7)$$

Donde $\dot{\gamma}$ es un escalar denominado el multiplicador plástico que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &> 0 \\ \dot{\gamma} \cdot f &= 0\end{aligned}\tag{2-8}$$

Lo anterior implica:

$$f < 0 \rightarrow \dot{\gamma} = 0 \rightarrow \dot{\varepsilon}_p = 0\tag{2-9}$$

El flujo plástico se presentará únicamente cuando el nivel de esfuerzo σ sea igual al esfuerzo de fluencia inicial:

$$|\sigma| = \sigma_y \rightarrow f = 0 \rightarrow \dot{\gamma} \geq 0\tag{2-10}$$

2.2.2. Ley de endurecimiento

El esfuerzo de fluencia σ_y en un caso general, no es una constante. En el caso particular cuando es constante, se tienen un modelo de plasticidad perfecta. En cualquier otro caso se requiere una ley de endurecimiento que defina la evolución. En términos generales se puede escribir como:

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p)\tag{2-11}$$

Donde $\bar{\varepsilon}_p$ es la deformación plástica equivalente uniaxial. Para el caso unidimensional se tiene:

$$\bar{\varepsilon}_p = \pm \varepsilon_p\tag{2-12}$$

Con signo positivo para tensión y signo negativo para compresión. La evolución de este escalar está dada por:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma}\tag{2-13}$$

La ley de endurecimiento se representa gráficamente como se muestra en la **Figura 2-4**. En esta curva se muestra la evolución del esfuerzo de fluencia para un proceso de carga plástica. La pendiente de esta curva llamada pendiente de endurecimiento puede también tener signo negativo, lo cual se denomina ablandamiento.

Esta curva tiene validez una vez se alcanza el primer esfuerzo de fluencia, para esa primera fluencia $\sigma_A = \sigma_y$. Para una fluencia posterior, debida a una recarga, σ_A será el σ_y al final del proceso de carga plástica anterior, el cual es distinto al esfuerzo de fluencia del material virgen.

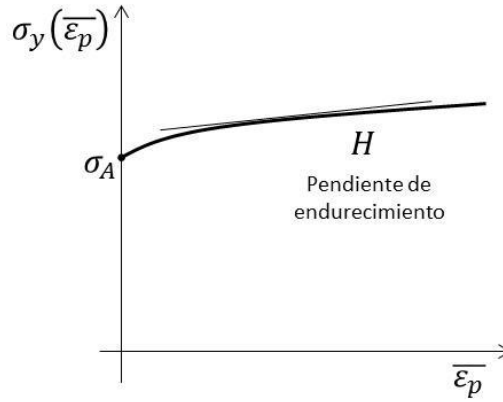


Figura 2-4: Curva de endurecimiento. Modelo unidimensional.

Derivando la función de fluencia con respecto al seudo tiempo, en la ecuación (2-3) se obtiene:

$$\dot{f} = \text{signo}(\sigma) \dot{\sigma} - H \dot{\bar{\epsilon}}_p \quad (2-14)$$

En donde H es la pendiente de endurecimiento definida como:

$$H(\bar{\epsilon}_p) = \frac{d\sigma_y}{d\bar{\epsilon}_p} \quad (2-15)$$

Cuando se presenta carga plástica la derivada de la función de fluencia es igual a cero $\dot{f} = 0$, con lo que se obtiene:

$$\text{signo}(\sigma) \dot{\sigma} = H \dot{\bar{\epsilon}}_p \quad (2-16)$$

De la ley elástica se tiene:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\bar{\epsilon}}_p) \quad (2-17)$$

De las expresiones (2-13), (2-16) y (2-7), el incremento del multiplicador plástico durante un proceso de carga plástica se puede expresar como: (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008)

$$\dot{\gamma} = \frac{E}{E + H} \text{signo}(\sigma) \dot{\epsilon} = \frac{E}{E + H} |\dot{\epsilon}| \quad (2-18)$$

2.2.3. Módulo tangente Elasto – Plástico

De forma incremental, la relación esfuerzo – deformación se puede expresar:

$$\dot{\sigma} = E^{ep} \dot{\epsilon} \quad (2-19)$$

Donde E^{ep} es el módulo elasto plástico tangente. E^{ep} se puede expresar, usando las ecuaciones (2-17), (2-7) y (2-18), como:

$$E^{ep} = \frac{EH}{E + H} \quad (2-20)$$

2.2.4. Efecto Bauschinger

Se observa en muchos metales que al ser sometidos a cargas cíclicas experimentan un endurecimiento, el cual aumenta el tamaño del dominio elástico, sin embargo, la superficie de fluencia no aumenta simétricamente y su centro O^* cambia de posición con respecto al inicial O . **Figura 2-5.**

Se denomina efecto Bauschinger o endurecimiento cinemático, al desplazamiento del centro de la superficie de fluencia en la dirección del flujo plástico. Este corrimiento genera que el esfuerzo de fluencia aumente en el sentido de la deformación plástica pero disminuye en el otro sentido.

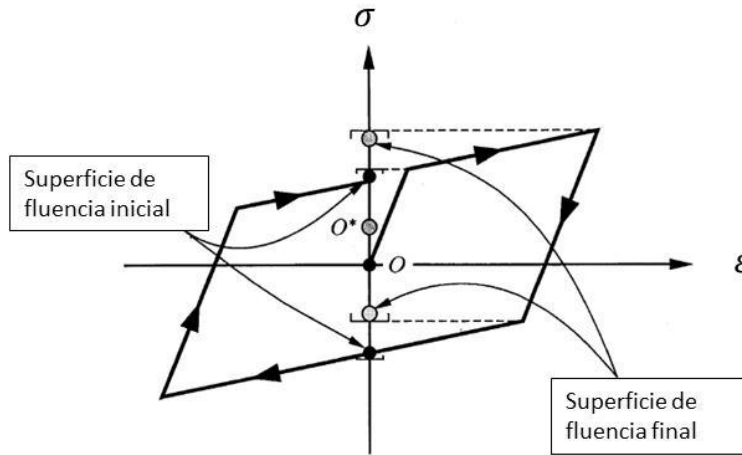


Figura 2-5: Efecto Bauschinger. (Simo y Hughes 1998)

Para representar este fenómeno se introduce una variable interna q la cual define la nueva posición del centro de la superficie de fluencia. Esta nueva variable se denomina back stress.

Al definir la variable q , ésta requiere de una ley de evolución para lo cual se introduce el módulo de endurecimiento cinemático K el cual relaciona el cambio de q con el cambio de la deformación plástica $\dot{\epsilon}_p$.

En esencia un espécimen sometido a estos ciclos descritos de carga y descarga difiere de un espécimen virgen en su esfuerzo de fluencia, el cual puede ser mayor o menor depende de la historia de las cargas y si lo que se aplica es tensión o compresión. (Lubliner 1990).

El modelo seleccionado para ser implementado en este trabajo no contempla el efecto Bauschinger.

2.2.5. Algoritmo de integración

El algoritmo de integración establece el esquema de cálculo del modelo constitutivo y permite la solución del problema mecánico. Este esquema tiene varias etapas como se enuncia a continuación:

- Etapa 1:

Sea $x \in \bar{B} = [0, L]$ un punto en un sólido que se comporta de acuerdo a un modelo constitutivo elasto – plástico. **Figura 2-6.**

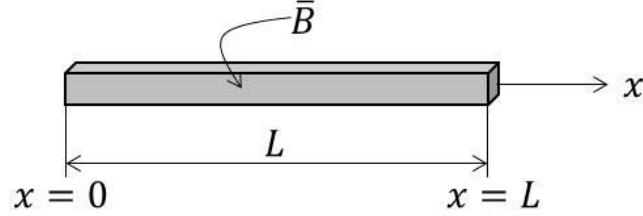


Figura 2-6: Sólido con comportamiento elasto – plástico.

- Etapa 2:

Se supone que en un punto x del sólido, en un instante de tiempo determinado t_n , todas las variables se encuentran determinadas.

$$\{\varepsilon(x, t_n), \varepsilon_p(x, t_n), \bar{\varepsilon}_p(x, t_n)\}$$

Por lo tanto se puede conocer el esfuerzo.

(2-21)

$$\sigma(x, t_n) = E \left(\varepsilon(x, t_n) - \varepsilon_p(x, t_n) \right)$$

- Etapa 3:

Se supone un incremento en la deformación total $\Delta\varepsilon(x)$ el cual controla el estado del tiempo $t_n + \Delta t = t_{n+1}$

El problema consiste en actualizar las variables básicas para el tiempo t_{n+1} es decir:

$$\{\varepsilon(x, t_{n+1}), \varepsilon_p(x, t_{n+1}), \bar{\varepsilon}_p(x, t_{n+1})\} \quad (2-22)$$

Este esquema de cálculo se denomina “de deformación controlada” pues está en términos de un incremento en la deformación. La deformación total es entonces una variable independiente (libre). Para el caso unidimensional se tiene:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2-23)$$

La deformación y todas las demás variables están referidas a un punto dentro del sólido, al usar el método de los elementos finitos como herramienta numérica, estos puntos al interior del elemento finito se denominan puntos de Gauss.

Esquemáticamente este procedimiento se puede representar como muestra la **Figura 2-7.**

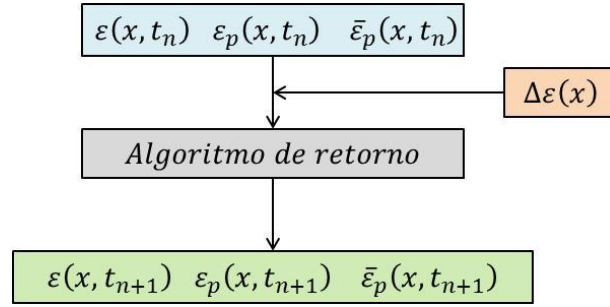


Figura 2-7: Algoritmo de integración con endurecimiento isótropo

El algoritmo de retorno es entonces la “caja negra”, dentro del algoritmo de integración, que permite obtener las variables en un estado posteriores a un incremento en la deformación total. El algoritmo de retorno se puede resumir como sigue:

- Estado elástico de prueba: Se asume un comportamiento elástico lineal para determinar un esfuerzo de prueba que puede o no ser el estado de esfuerzo en el paso siguiente luego del incremento en la deformación.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n+1}^{Trial} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \\
 \varepsilon_{n+1}^{p\,Trial} &= \varepsilon_n^p \\
 \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\,Trial} &= \bar{\varepsilon}_n^p \\
 f_{n+1}^{Trial} &= |\sigma_{n+1}^{Trial}| - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p)
 \end{aligned} \tag{2-24}$$

- Forma algorítmica de la condición de carga: en el paso anterior se calculó la función de fluencia de prueba, con esto se puede determinar si se está en rango elástico o en rango plástico:

$$\begin{aligned}
 &\text{Si } f_{n+1}^{Trial} \leq 0 \text{ Entonces } \rightarrow \text{Paso elástico} \\
 &\quad \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \\
 &\quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p \\
 &\quad \sigma_{n+1} = E\varepsilon_{n+1} \\
 &\text{Si } f_{n+1}^{Trial} > 0 \text{ Entonces } \rightarrow \text{Paso plástico} \\
 &\quad f_{n+1}^{Trial} > 0 \Leftrightarrow f_{n+1} = 0 \\
 &\quad \Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{Trial}}{E + H} > 0
 \end{aligned} \tag{2-25}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{Trial} - E\Delta\gamma \operatorname{signo}(\sigma_{n+1}^{Trial}) \\ \varepsilon_{n+1}^{Trial} &= \varepsilon_n^{Trial} + \Delta\gamma \operatorname{signo}(\sigma_{n+1}^{Trial}) \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma\end{aligned}$$

En las ecuaciones (2-24) y (2-25) se muestra el algoritmo de retorno para el caso de plasticidad con endurecimiento isótropo, en el caso de endurecimiento cinemático o efecto Bauschinger, se deben tener en cuenta las variables asociadas, pero el procedimiento es el mismo. (Simo y Hughes 1998).

2.3. Motivación: Modelación numérica de armaduras con material elasto – plástico.

Este proyecto de investigación busca representar el comportamiento de estructuras de concreto simple mediante un análisis no lineal con elementos finitos considerando un material elasto-plástico. Para lograr este objetivo se propuso inicialmente, primero: construir un programa de elementos finitos de análisis no lineal, en el cual se implemente un modelo unidimensional de plasticidad aplicado a armaduras planas, segundo: desarrollar un modelo bidimensional de plasticidad implementado en elementos finitos y tercero: incluir un criterio de fallo especial para el concreto simple en el modelo anterior. (Rodríguez, Herrera y Linero 2009).

La primera etapa se presenta como introducción a las dos etapas posteriores de las que trata esencialmente esta tesis. Esta etapa proporciona una visión general del problema no lineal simplificada a una sola dimensión.

El paso posterior fue extender el trabajo realizado en la primera etapa y llevarlo a un estado plano de esfuerzos para analizar el comportamiento elasto-plástico del concreto simple.

El procedimiento no lineal, usado en la primera etapa, consiste en analizar el comportamiento de la estructura como si fuera lineal en pequeños incrementos de carga o de desplazamiento. En este caso la fuente de la no linealidad entre las cargas y los desplazamientos asociados, radica en el comportamiento del material, el cual está regido por un modelo constitutivo elasto-plástico bilineal.

En este tipo de problemas se discretiza el pseudo tiempo y el espacio. La discretización en el pseudo tiempo divide la magnitud de las cargas o desplazamientos aplicados en intervalos o pasos, en cada uno de los cuales se resuelve el problema mecánico. En cambio la discretización en el espacio divide el dominio del sólido en una malla de elementos finitos conectados entre sí por medio de nudos.

Para cada instante o paso de carga el material se encuentra en un estado representado por los módulos tangentes y las variables internas que se actualizan en cada paso y guardan la historia del material.

En cada paso de carga se establece el equilibrio de la estructura mediante un proceso iterativo de análisis lineal con las propiedades del material en ese momento.

En cada iteración se resuelve la estructura con el incremento en la carga correspondiente al paso, con esto se obtienen los incrementos de los desplazamientos en los nudos y posteriormente los incrementos en la deformación en cada uno de los elementos.

En la primera iteración para cada elemento finito, las variables internas del material, la deformación y el esfuerzo se inicializan en cero. Al final de cada iteración todos estos valores se actualizan siguiendo las expresiones del modelo constitutivo utilizado.

Al aplicar el modelo constitutivo también se obtienen nuevos módulos con los cuales se ensambla de nuevo la matriz de rigidez de la estructura. Si se trata de un modelo constitutivo elasto-plástico, como es este caso, los primeros pasos de carga serán en el rango elástico y dichos módulos no cambiarán, por otra parte al seguir aumentando las cargas, se superará el límite elástico y el material en algunos elementos iniciará un comportamiento plástico, ya sea con endurecimiento o ablandamiento. Es en esta zona en donde la rigidez de la estructura cambia y se pierde la linealidad.

Para determinar la convergencia al final de cada iteración y saber si se puede proseguir con el paso de carga siguiente, se compara la norma del vector de los incrementos de los desplazamientos en los nudos de la estructura con la norma obtenida en la iteración anterior, si se cumple con el criterio se asume que los valores obtenidos en la última iteración son los correspondientes al paso de carga analizado y se procede con el siguiente, teniendo presente que se almacenan todas las variables históricas propias del modelo constitutivo.

Es importante mencionar que no se están contemplando fenómenos propios de las cerchas como por ejemplo, pandeo de los elementos en compresión, únicamente se está analizando la no linealidad proveniente del comportamiento del material.

En la **Figura 2-8** se muestra un ejemplo desarrollado con el modelo bilineal de plasticidad con endurecimiento implementado en el programa PEFiCA (Linero 2010). Para implementar este modelo el programa PEFiCA fue modificado para realizar el análisis no lineal.

En este ejemplo se realizaron las etapas de carga elástica hasta llegar al esfuerzo de fluencia del material, luego de este punto se aumenta aún más la carga en una etapa de carga plástica y se evidencia que el material se está representando por medio de un modelo de plasticidad con endurecimiento. Al final se obtiene la curva de la carga aplicada vs. el desplazamiento generado.

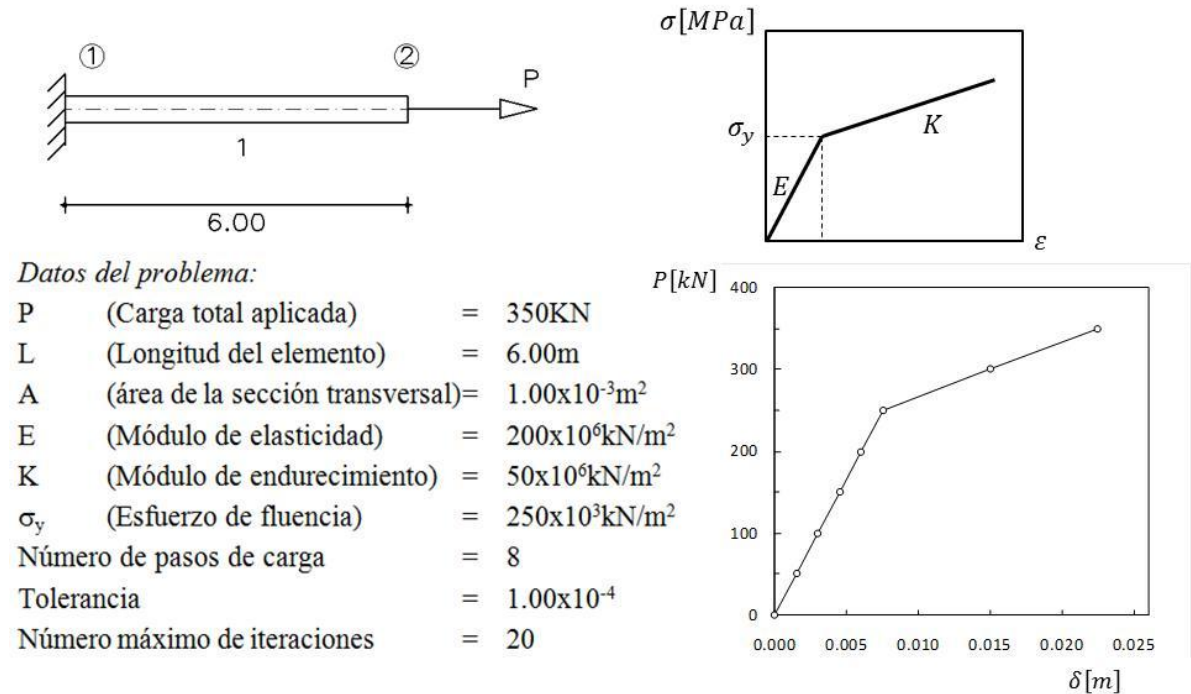


Figura 2-8: Ejemplo de barra con material elasto-plástico sometida a tensión.

Para complementar el ejemplo y poder ver las otras etapas de descarga y recarga se muestra la misma barra pero con otra historia de carga, en la cual, luego de realizar el mismo proceso de carga mostrado anteriormente, se descarga para mostrar la deformación plástica que queda de manera permanente. Posteriormente se realiza una recarga en sentido contrario (compresión) encontrando de nuevo el esfuerzo de fluencia y de nuevo al pérdida de rigidez. En la **Figura 2-9** se resaltan puntos en los que suceden cambios de comportamiento ya sea porque el material cambia de rango o porque la carga aplicada externamente cambia de sentido.

Los puntos en blanco son puntos en los cuales el comportamiento de la barra cambia por cambios de comportamiento en el material, estos puntos son inevitables y no dependen de la historia de carga.

Por otra parte los puntos sombreados surgen por la manera como se cargó la barra. No son puntos obligados si no que corresponden a los puntos en los cuales se decide que la carga cambie de sentido.

Haciendo referencia a la **Figura 2-9**, el punto 1 corresponde al inicio de la carga (tensión) aplicada a la barra. Conforme aumenta la carga se llega al punto 2 en el cual el material llega al esfuerzo de fluencia. Entre los puntos 1 y 2 ocurre un proceso de carga elástica. A partir de este punto la rigidez de la barra decae y el material entra en el rango plástico. Del punto 2 al 3 el proceso es de carga plástica. La carga aumenta hasta el punto 3 en el cual cambia de sentido e inicia la descarga elástica. El punto 3 es arbitrario y depende

únicamente de la historia de carga, en la cual se decidió que en este punto la carga cambiara de sentido.

La carga ahora en sentido contrario incrementa su magnitud hasta que comienza a aplicar compresión en la barra hasta que se alcanza de nuevo la fluencia en el punto 4. Del punto 3 al 4 se presenta una descarga elástica o recarga elástica en el otro sentido.

Al sobrepasar el punto 4 se entra de nuevo en carga plástica hasta el punto 5 en donde de nuevo la historia de carga dice que la carga cambia de sentido, se descarga hasta el punto 6 y de nuevo la carga cambia de sentido hasta alcanzar de nuevo el esfuerzo de fluencia en el punto 7. A partir del punto 7 sigue aumentando la carga hasta el punto 8 en donde finaliza el ejemplo.

Como se mencionó anteriormente los puntos que dependen únicamente de la historia de carga, es decir los que son arbitrarios u opcionales son los puntos en donde la carga cambia de sentido, los cuales son: 3, 5 y 6.

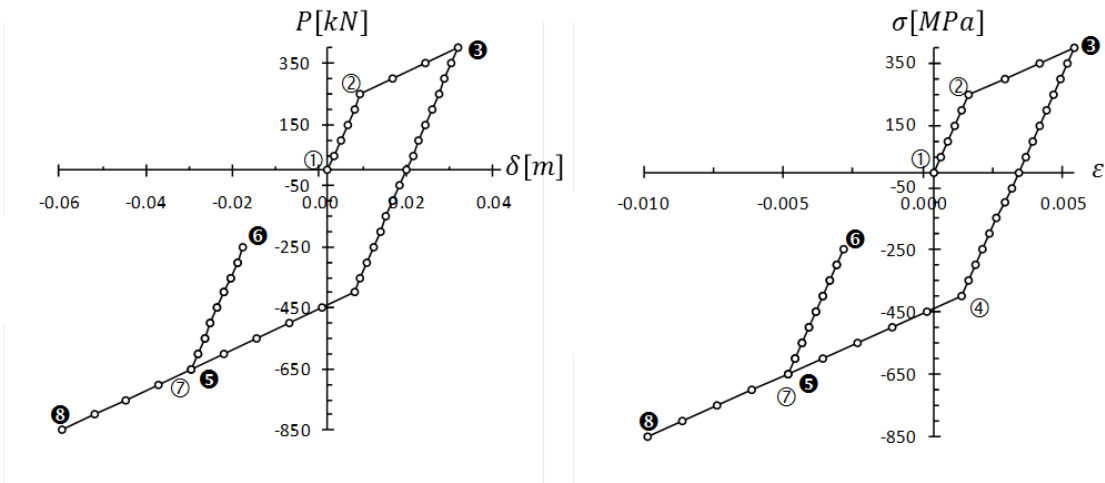


Figura 2-9: Curvas Fuerza – Desplazamiento y Esfuerzo – Deformación de una barra cargada axialmente en un proceso de cargas, descargas y recargas.

El caso de la barra resuelta en el ejemplo anterior, es un caso particular de la armadura, es una armadura de un solo elemento. Ahora se presenta un segundo ejemplo para una armadura compuesta por 5 barras, **Figura 2-10**.

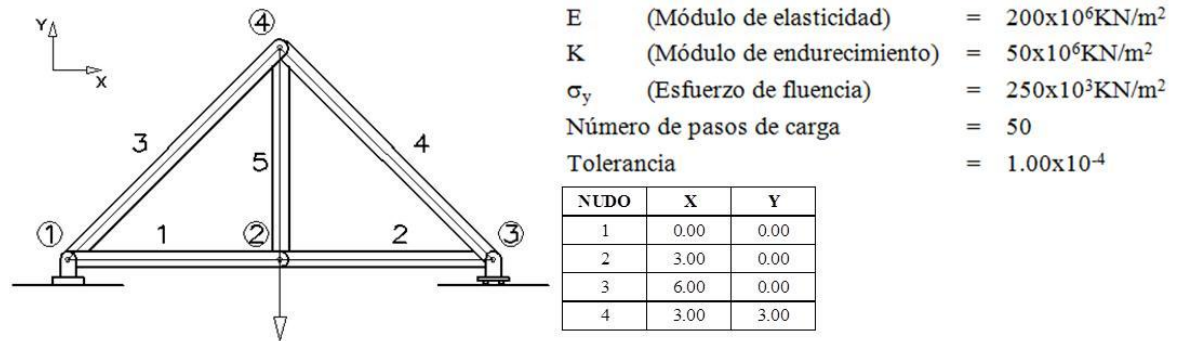


Figura 2-10: Ejemplo de cercha con material elasto-plástico

La historia de carga se define como sigue: Inicialmente la carga comienza en cero y se incrementa gradualmente en intervalos de 50kN en dirección “Y” negativo hasta llegar a un valor de 650kN, en este punto se incrementa en el sentido contrario hasta llegar a un valor de 900kN en dirección “Y” positivo. Finalmente se incrementa en el otro sentido hasta llegar a un valor de 650kN en el sentido Y positivo.

Antes de mostrar los resultados de la historia de carga descrita, se resolvió la estructura con una carga unitaria y se calcularon las acciones internas en cada una de las barras.

En la **Figura 2-11** se muestran la magnitud de dichas acciones en cada una de las barras como una fracción de la mayor. Con base en esto se obtiene una idea de cuáles son las barras más exigidas al disponer una carga como se muestra.

Teniendo en cuenta esto se determina que al aplicar carga en el nudo dos (2) en dirección “Y”, la barra que se espera fluya primero será la barra No. 5 (con fracción de 1.00), posteriormente las barras No. 3 y 4 (con fracciones de 0.71) y finalmente las barras No. 1 y 2 (con fracciones de 0.55). Esto debido a que el material asumido tiene el mismo comportamiento tanto en tensión como en compresión.

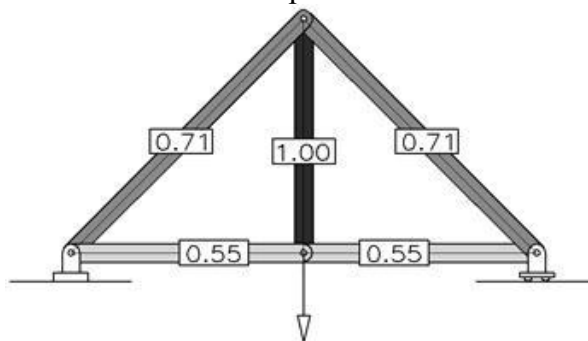


Figura 2-11: Esfuerzos en las barras como una fracción del mayor

En la **Figura 2-12** se muestra la carga aplicada y el desplazamiento obtenido en el nudo 2, el cual fue el lugar de aplicación de la carga. El desplazamiento mostrado es en dirección de la carga aplicada, es decir “Y”.

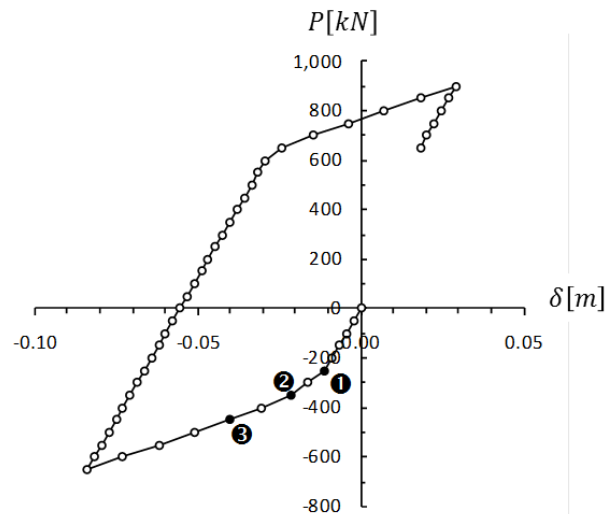


Figura 2-12: Curva carga – desplazamiento en el nudo 2 y dirección Y, cercha con material elasto-plástico.

Analizando la primera parte de la historia de carga, es decir antes de que tenga lugar el primer cambio de dirección de la carga se tiene:

Los puntos resaltados indican el momento en los que fluyen cada una de las barras, inicialmente lo hace la barra 5 posteriormente las barras 3 y 4 y finalmente las barras 1 y 2, resultado que es coherente con el análisis realizado con la carga unitaria previamente.

Se analiza ahora cada elemento y se presentan en la **Figura 2-13** las curvas de esfuerzo deformación. Se muestran también los eventos en los que entran en fluencia las otras barras.

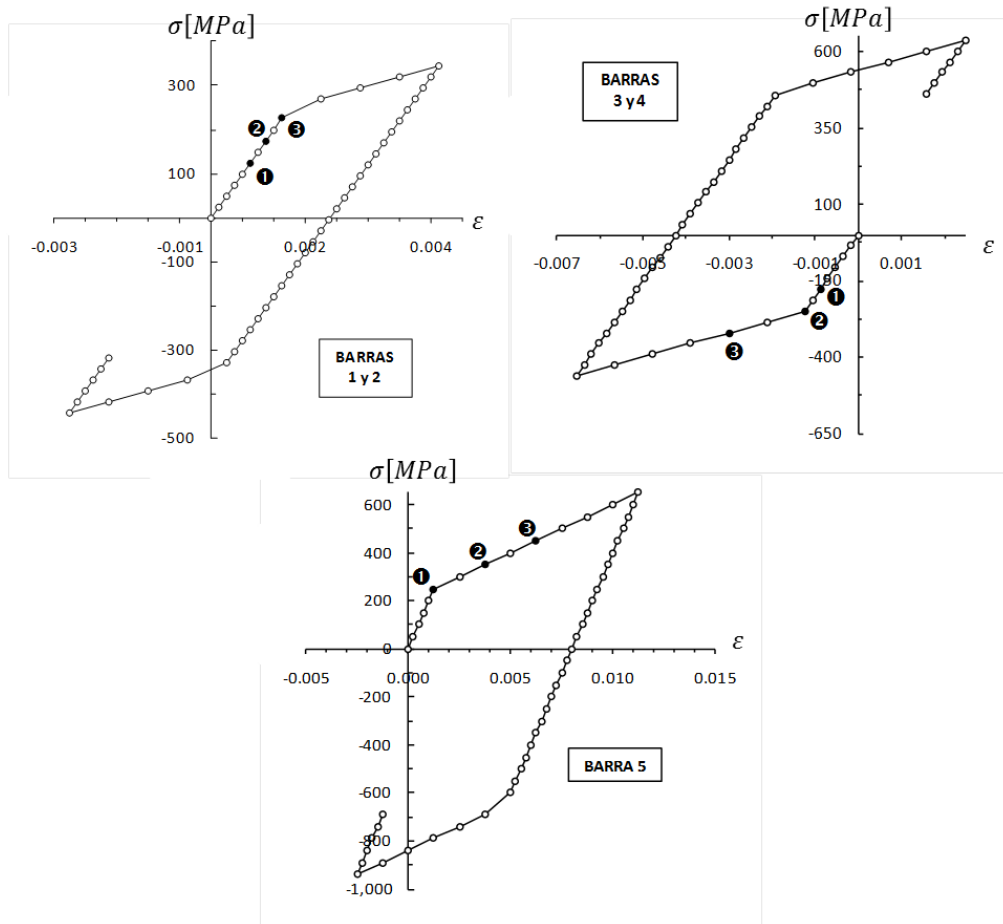


Figura 2-13: Curvas esfuerzo – deformación de cada elemento de la cercha con material elasto-plástico

Partiendo de las rutinas existentes del programa PEFiCA se ha logrado complementarlo con una rutina para efectuar análisis no lineales cuando la no linealidad es causada por el comportamiento del material.

Se cuenta ahora con una herramienta para implementar distintos modelos constitutivos ya sea de daño o de plasticidad o algún otro tipo de comportamiento que esté enmarcado en el rango de las pequeñas deformaciones.

Esta herramienta fue generada para el caso de cerchas planas pero es fácilmente adaptable a otro tipo de elementos cambiando o invocando las sub rutinas de generación de las matrices de rigidez y de funciones de forma B ya existentes dentro de PEFiCA.

Desde el punto de vista académico se tiene un buen punto de partida para extender el tipo de elementos y por ende el tipo de estructuras a las cuales es aplicable la rutina de cálculo no lineal.

Adicionalmente con la implementación de la rutina no lineal de análisis se logra una herramienta que permite visualizar previamente los resultados de un modelo constitutivo de manera rápida, simple y lo más importante, teniendo conocimiento pleno de todos los cálculos y procedimientos internos de la aplicación puesto que se mantiene la filosofía de ser un programa a código abierto.

Con respecto al modelo particular implementado de plasticidad con endurecimiento isótropo, se obtiene el comportamiento esperado para un material de este tipo.

Las gráficas tanto de carga – desplazamiento y de esfuerzo – deformación evidencian el tipo de comportamiento en cada una de las etapas. El código implementado en PEFiCA se muestra en el **Anexo B**.

2.4. Elasto plasticidad 3 – D

Para el problema en el medio continuo, las condiciones y definiciones realizadas en la parte unidimensional se mantienen, pero se extiende a tres dimensiones. En este numeral se presentará de forma resumida la teoría matemática para la plasticidad en tres dimensiones.

Se mantiene la descomposición aditiva de la deformación, de forma que el tensor de deformación total es igual a:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (2-26)$$

siendo $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ los tensores de deformación elástico y plástico respectivamente.

La relación elástica entre el tensor de esfuerzo y de deformación estará dada de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-27)$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$$

donde \mathbb{C} es el tensor constitutivo elástico de cuarto orden.

La relación esfuerzo deformación general estará dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{W}(\{\mathbf{x}\}, \boldsymbol{\varepsilon}_e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2-28)$$

\mathcal{W} es el potencial elástico y es función de la posición y la deformación elástica.

La ley de evolución del tensor de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ está dada en función de la variación del potencial plástico $G(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)$, como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \gamma \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2-29)$$

Se define la tasa de deformación plástica equivalente como el escalar de la forma:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p = \gamma \quad (2-30)$$

La función de fluencia estará dada por:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) &= F(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p) \\ F(\boldsymbol{\sigma}) &> 0 \end{aligned} \quad (2-31)$$

Donde F es una función que depende del estado de esfuerzos y otorga como resultado un valor escalar positivo.

El dominio elástico y la superficie de fluencia están definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \{(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) | f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) < 0\} \\ \{(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) | f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) = 0\} \end{aligned} \quad (2-32)$$

El estado de esfuerzos admisibles será la unión entre el dominio elástico y su contorno: la superficie de fluencia.

Por otra parte, el tensor constitutivo tangente elasto plástico se puede obtener derivando la función de fluencia en el tiempo, de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \dot{\bar{\varepsilon}}_p \\ \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H \dot{\bar{\varepsilon}}_p \end{aligned} \quad (2-33)$$

Reemplazando la ecuación (2-29)_a en la relación constitutiva elástica (2-27), pero en términos incrementales, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{C} \gamma \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (2-34)$$

Sustituyendo (2-34)_c en (2-33)_b se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - H \dot{\bar{\varepsilon}}_p \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_p &= \gamma \\ \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + H \right) \end{aligned} \quad (2-35)$$

Si $\gamma > 0 \rightarrow \gamma \dot{f} = 0$ para $f = 0 \rightarrow \dot{f} = 0$ y se tiene un estado de carga plástica.

Despejando el multiplicador plástico se tiene:

$$\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + H} \quad (2-36)$$

Reemplazando el valor de γ de la ecuación (2-36) en (2-34)_b se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + H} \right) \otimes \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \left(\mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + H} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C}^{Tan} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}\tag{2-37}$$

Donde \mathbb{C}^{Tan} es el tensor constitutivo tangente que en general no es simétrico. Si la función G se iguala a la función F , se obtiene una regla de flujo asociada. Sólo en ese caso \mathbb{C}^{Tan} resulta simétrico.

La función F estará definida por el modelo constitutivo seleccionado. En el **Capítulo 4** se muestran las funciones F para el modelo implementado.

El algoritmo de integración se realiza de forma análoga al caso analizado para una sola dimensión. (Simo y Hughes 1998).

Capítulo 3

Plasticidad para el concreto

Los modelos de plasticidad tienen una fundamentación matemática bastante sólida, la cual se complementa con una amplia información proveniente de ensayos experimentales, para lograr reproducir de la manera más adecuada, el comportamiento mecánico del concreto.

En este capítulo se hace referencia a algunos de los modelos constitutivos de plasticidad existentes para representar el comportamiento del concreto simple. En esta tesis, uno de estos modelos ha sido seleccionado e implementado en el método de los elementos finitos.

3.1. Comportamiento mecánico del concreto

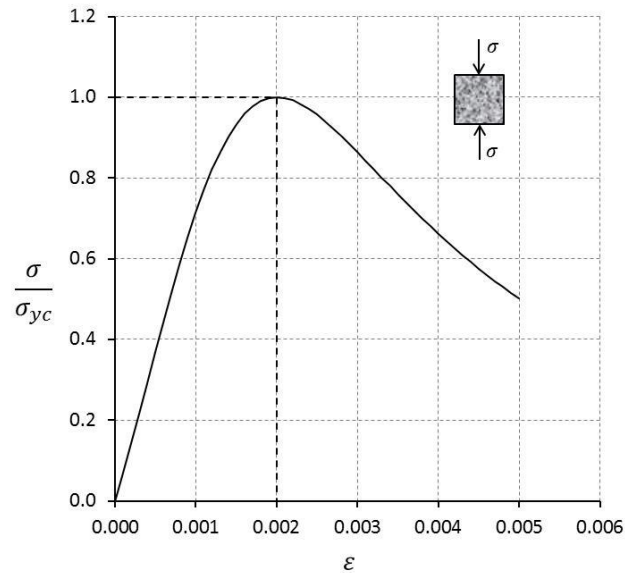
El concreto es un material compuesto, que consiste en agregado grueso, agregado fino y pasta de cemento. El comportamiento mecánico del concreto es complejo y depende de muchos factores como la relación agua – cemento, la relación cemento – agregado, el tamaño y forma del agregado y la clase de cemento, entre otras. (Chen y Han 2007)

El comportamiento analizado en este trabajo está restringido únicamente a la relación esfuerzo – deformación del concreto común en promedio. El concreto es un material de naturaleza frágil y la relación esfuerzo deformación se ve afectada por micro fisuras.

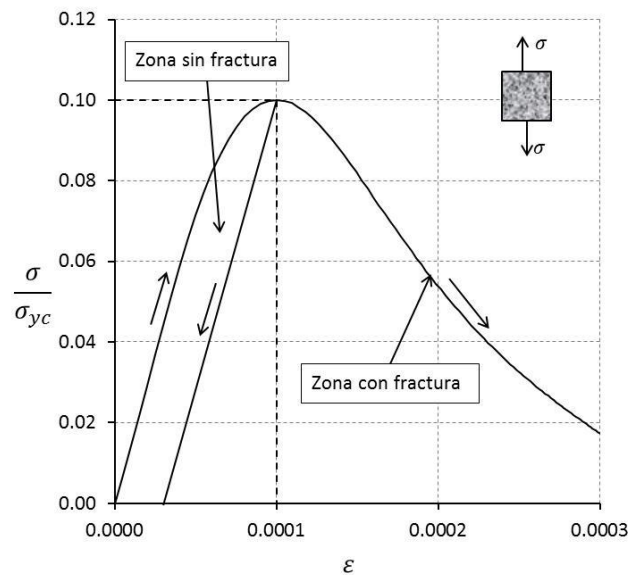
Particularmente el concreto contiene un gran número de micro fisuras, especialmente en las interfaces entre el agregado y la pasta. Estas micro fisuras están presentes incluso antes de la aplicación de las cargas externas y son causadas por la segregación, la retracción y/o variaciones de temperatura de la pasta.

Al aplicar las cargas, las micro fisuras se propagan y comienzan a hacerse visibles conforme se incrementan las cargas. Las micro fisuras iniciales y la propagación de las mismas, por parte de la aplicación de cargas externa, contribuyen al comportamiento no lineal del concreto.

Los fenómenos de fractura alteran principalmente el comportamiento del concreto en el rango de esfuerzos de tensión. En este rango, el concreto tiene una resistencia mucho menor que en el rango de compresión, esto debido a que la interface entre el agregado y la pasta de cemento presenta una baja transferencia de esfuerzos. La curva esfuerzo deformación del concreto tiene la forma que muestra la **Figura 3-1**.



a)



b)

Figura 3-1: Curvas esfuerzo – deformación del concreto simple. a) Rango de compresión uniaxial
b) Rango de tensión uniaxial. (Peterson 1981).

En la parte **a)** de esta figura se presenta una curva típica esfuerzo deformación del concreto sometido a esfuerzos de compresión. Al inicio de un proceso de carga, se observa que en un rango de esfuerzo menor al 30% del esfuerzo de fluencia σ_{yc} , se presenta un comportamiento elástico lineal. En este nivel de esfuerzos las fisuras presentes en el concreto permanecen sin cambios representativos.

Al aumentar el nivel de esfuerzo, se pierde la linealidad. Para un nivel de esfuerzo entre el 30% y el 75% del esfuerzo de fluencia, las fisuras aumentan en número, longitud y abertura. (Chen y Han 2007).

Al incrementar aún más el nivel de esfuerzo, el proceso de fisuración continúa pero ahora en una etapa en la cual se torna inestable. En esta etapa se hace más evidente el comportamiento no lineal. Después de superar el esfuerzo de fluencia, se presenta una etapa de ablandamiento.

En la parte **b)** de la misma figura, se muestra la curva esfuerzo deformación pero para el rango de tensión uniaxial. En este rango, el esfuerzo de fluencia es considerablemente menor que en el rango de compresión, siendo del orden del 10%.

En el rango de tensión, al cargar el material, también se observa un comportamiento inicialmente elástico lineal y posteriormente una etapa no lineal. El comportamiento en tensión se puede dividir en dos etapas, la primera, una etapa fuera de la zona de fractura y la segunda, en la zona de fractura.

En la primera etapa, el material se puede cargar y descargar sin que se presenten fisuras considerables pero se presentan deformaciones permanentes. Si se supera esta etapa, se presentarán fisuras que generarán una rápida pérdida de resistencia. (Peterson 1981).

El modelo que se implementa en esta tesis no permite tener en cuenta los procesos de fractura, es por esto que en el rango de tensión, se considera plasticidad perfecta para representar el comportamiento únicamente en la zona sin fractura de la curva esfuerzo – deformación.

3.2. Modelos de plasticidad para el concreto

Los modelos de plasticidad para representar el comportamiento del concreto se enmarcan en un análisis mecánico macroscópico. La teoría de la plasticidad clásica fue formulada inicialmente para metales, en donde el comportamiento es diferente al concreto. Sin embargo, desde un punto de vista macroscópico, los metales poseen características similares al concreto, especialmente en el rango previo al colapso. (Chen y Han 2007).

Por ejemplo, el concreto exhibe un comportamiento no lineal durante el proceso de carga y presenta una deformación irreversible luego de ser retirada la carga. Especialmente en el rango de compresión triaxial o biaxial, este material presenta un comportamiento de

naturaleza dúctil. Estas características pueden ser modeladas mediante la teoría de la plasticidad. (Chen y Han 2007).

3.2.1. Modelo de Ottosen

Este modelo, formulado por Ottosen, establece que la superficie de fluencia del concreto en el espacio de los esfuerzos principales es de la forma:

$$f(I_1', J_2', \theta) = aJ_2' + \lambda\sqrt{J_2'} + bI_1' - 1 = 0 \quad (3-1)$$

Donde:

$$\begin{aligned} I_1' &= \frac{I_1}{\sigma_{yc}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_{yc}} \\ J_2' &= \frac{J_2}{\sigma_{yc}} = \frac{1}{6\sigma_{yc}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \\ \lambda &= \begin{cases} k_1 \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1}(k_2 \cos(3\theta)) \right] & \text{para } \cos(3\theta) \geq 0 \\ k_1 \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(-k_2 \cos(3\theta)) \right] & \text{para } \cos(3\theta) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-2)$$

Los cuatro parámetros adimensionales a, b, k_1 y k_2 son determinados a partir de ensayos experimentales. Se requieren ensayos uniaxiales para determinar el esfuerzo de fluencia en compresión y en tensión pura. Adicionalmente son necesarios ensayos biaxiales y triaxiales para determinar el umbral de fluencia correspondiente a estos estados de esfuerzo. (Chen y Han 2007).

La Ecuación (3-1) define una superficie compuesta de meridianos curvos con sección no circular en los planos desviadores. (Chen y Han 2007). Este modelo tiene la capacidad de representar otros modelos en casos particulares y dependiendo de los valores que tomen los parámetros.

Si $a = b = 0$ y λ constante, se obtiene la superficie de fluencia del modelo de Von Mises. En otro caso si $a = 0, b \neq 0$ y λ constante, se obtiene la superficie de fluencia del modelo de Druker – Prager.

Para usar este modelo se requieren 4 parámetros que pueden ser medidos en ensayos de laboratorio. Los parámetros obtenidos experimentalmente para reproducir el comportamiento del concreto son:

Tabla 3-1: Parámetros para el modelo, (Ottosen 1977)

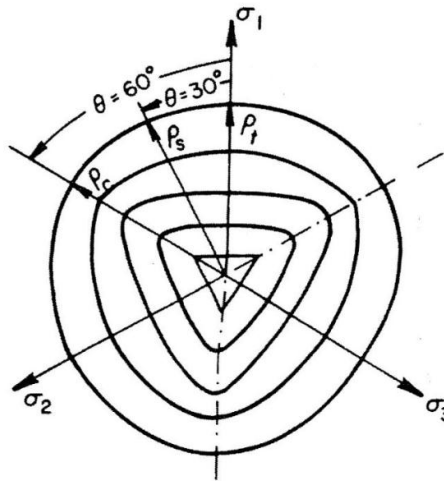
| σ_{yc}/σ_{yt} | a | b | k_1 | k_2 |
|---------------------------|--------|--------|---------|--------|
| 0.08 | 1.8076 | 4.0962 | 14.4863 | 0.9914 |
| 0.10 | 1.2759 | 3.1962 | 11.7365 | 0.9801 |
| 0.12 | 0.9218 | 2.5969 | 9.9110 | 0.9647 |

Los valores de I_1 y J_2 representan el primer invariante del estado de esfuerzos y el segundo invariante del estado de esfuerzos desviador respectivamente.

El ángulo θ especifica el meridiano de la superficie de fluencia dependiendo del rango en el cual se encuentra el estado de esfuerzos así:

$$\theta = \begin{cases} 0^\circ \rightarrow & \text{Meridiano de tensión } (\rho_t) \\ 30^\circ \rightarrow & \text{Meridiano de cortante } (\rho_s) \\ 60^\circ \rightarrow & \text{Meridiano de compresión } (\rho_c) \end{cases} \quad (3-3)$$

El ángulo θ se representa gráficamente en un plano desviador así:

**Figura 3-2:** Sección de la superficie de fluencia en un plano desviador. (Chen y Han 2007)

Este modelo representa el comportamiento del concreto en buena medida y bajo un gran rango de combinaciones de esfuerzo, sin embargo la función λ un tanto complicada de obtener.

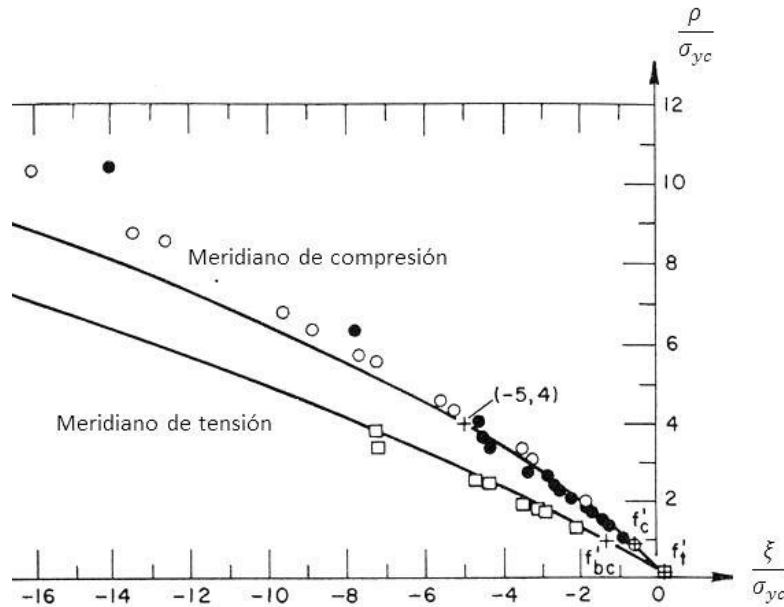


Figura 3-3: Modelo de Ottosen vs. resultados experimentales, (Chen y Han 2007)

En la **Figura 3-3** se muestran los meridianos de compresión y tensión del modelo numérico de Ottosen y se comparan con resultados experimentales. En la misma gráfica se están mostrando los datos para ensayos en compresión y en tensión. El meridiano de compresión se está comparando con datos experimentales obtenidos por (Balmer 1949) mostrados con círculos sin relleno. También se compara el meridiano de compresión y de tensión con datos experimentales obtenidos por (Richart, Brandtzaeg y Brown 1928) mostrados en círculos rellenos y cuadrados respectivamente.

3.2.2. Modelo de Hsieh – Ting – Chen

Este modelo cuenta con la misma función de fluencia propuesta por (Ottosen 1977) en términos de cuatro parámetros y utiliza un factor λ más fácil de evaluar. Hsieh y otros proponen un factor λ de la forma:

$$\begin{aligned}\lambda(\theta) &= b \cos(\theta) + c \\ |\theta| &\leq 60^\circ\end{aligned}\tag{3-4}$$

Al reemplazar la expresión anterior en la función de fluencia del modelo de (Ottosen 1977), ecuación (3-1) y usando las coordenadas de Haing-Westergaard (Chen y Han 2007), se tiene que la función de fluencia es igual a:

$$\begin{aligned}f(\xi, \rho, \theta) &= a\rho^2 + \lambda\rho + d\xi - 1 = 0 \\ f(\xi, \rho, \theta) &= a\rho^2 + (b \cos(\theta) + c)\rho + d\xi - 1 = 0\end{aligned}\tag{3-5}$$

Donde a, b, c y d son constantes del material (Hsieh, Ting y Chen 1982). La ecuación (3-5)_b se puede reescribir de la forma:

$$AJ_2 + B\sqrt{J_2} + C\sigma_1 + DI_1 - 1 = 0 \quad (3-6)$$

La relación entre los parámetros a, b, c y d y los parámetros A, B, C y D de la ecuación anterior es:

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{2} & b &= \sqrt{\frac{2}{3}}C \\ c &= \frac{B}{\sqrt{2}} & d &= \sqrt{3}\left(D + \frac{b}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned} \quad (3-7)$$

A partir de los valores experimentales de A, B, C y D se derivan las magnitudes de a, b, c y d . Los datos obtenidos experimentalmente se muestran en la **Tabla 3-2**.

Tabla 3-2: Parámetros para el modelo, (Hsieh, Ting y Chen 1982)

| A | B | C | D |
|--------|--------|--------|--------|
| 2.0108 | 0.9714 | 9.1412 | 0.2312 |

En la **Figura 3-4** se compara el modelo de (Hsieh, Ting y Chen 1982) con resultados experimentales. En la misma gráfica se están mostrando resultados para ensayos de compresión y de tensión graficados en un plano de esfuerzos octaédricos normalizados.

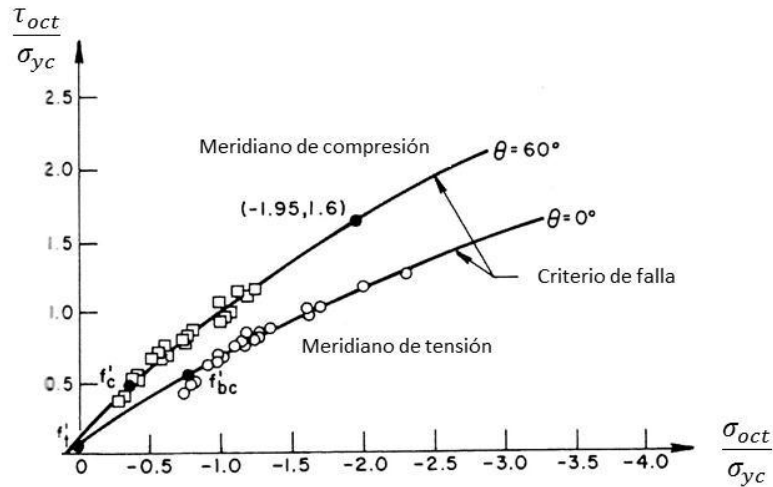


Figura 3-4: Modelo de Hsieh – Ting – Chen con resultados experimentales, (Chen y Han 2007)

En la **Figura 3-5** se muestra la superficie de fluencia pero vista en un plano desviador, donde se observa que sus derivadas no son continuas debido a la existencia de vértices. Esto complica el proceso de convergencia en un análisis no lineal que use este modelo.

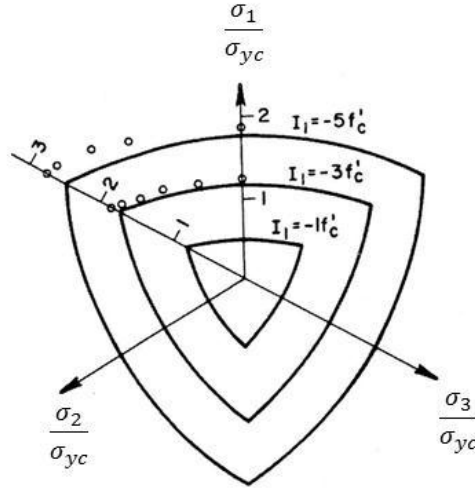


Figura 3-5: Modelo de Hsieh – Ting – Chen en un plano desviador, (Chen y Han 2007)

3.2.3. Modelo de William – Warnke

Este es un modelo constitutivo de cinco parámetros que resuelve el problema de los vértices en la superficie de fluencia que presenta el modelo de (Hsieh, Ting y Chen 1982). Este modelo está definido por meridianos de tensión y compresión dados por parábolas cuadráticas para tensión y compresión respectivamente, de la forma:

$$\begin{aligned}\sigma_m &= a_0 + a_1\rho_t + a_2\rho_t^2 \\ \sigma_m &= b_0 + b_1\rho_c + b_2\rho_c^2\end{aligned}\tag{3-8}$$

Donde:

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3\sigma_{yc}}\tag{3-9}$$

ρ_c y ρ_t son componentes de esfuerzo perpendiculares al eje hidrostático con $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 60^\circ$ respectivamente. Los parámetros a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 y b_2 son constantes del material obtenidas mediante ensayos experimentales. Todos los esfuerzos están normalizados al ser divididos entre σ_{yc} . En la **Figura 3-6** se muestra el meridiano de compresión y de tensión de la superficie de fluencia en el modelo de (William y Warnke 1975) y los resultados experimentales obtenidos por Ottosen y Mills.

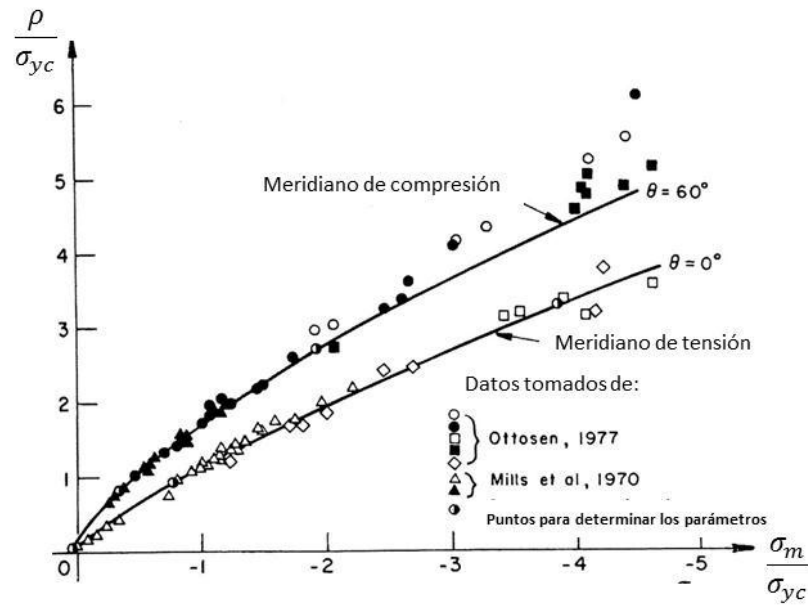


Figura 3-6: Modelo de William y Warnke, (Chen y Han 2007)

Para determinar los cinco parámetros se requieren ensayos de laboratorio como en los modelos anteriores (Chen y Han 2007). Los valores para estos parámetros para un concreto típico se muestran en la **Tabla 3-3**.

Tabla 3-3: Parámetros para el modelo de (William y Warnke 1975)

| a_0 | a_1 | a_2 | b_1 | b_1 |
|--------|---------|---------|---------|---------|
| 0.1025 | -0.8403 | -0.0910 | -0.4507 | -0.1018 |

En el modelo de (William y Warnke 1975), la superficie de fluencia vista en un plano desviador, tiene bordes redondeados que hacen que su derivada sea continua. En la **Figura 3-7** se observa esta condición.

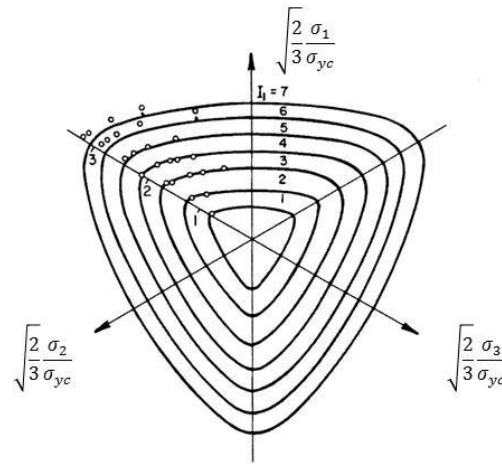


Figura 3-7: Modelo de William y Warnke en un plano desviador, (Chen y Han 2007)

3.2.4. Modelo de Hsuan-Teh Hu y William C. Schnobrich

Este es un modelo de plasticidad no asociada para representar el comportamiento del concreto en un estado plano de esfuerzos y utiliza los resultados experimentales de (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969) para calibrar sus ecuaciones.

En el **Capítulo 4** se analiza este modelo en detalle, el cual es implementado en los capítulos siguientes.

3.2.5. Otros modelos

Existen otros modelos que usan la teoría de la plasticidad para representar el comportamiento del concreto simple. Entre otros, se encuentran los siguientes modelos que fueron investigados en este trabajo:

- Modelo constitutivo con plano de rotación activo y esfuerzo real de (Zubelewicz 1983) y (Bazant 1983).
- Modelo plástico para el concreto en esfuerzo plano de (Winnicki y Cichon 1993).
- Modelo de (Voyiadjis y Abulebdeh 1993).
- Modelo de plasticidad de (Zaman, Najjar y Faruque 1993).

Capítulo 4

Formulación del modelo constitutivo

El modelo seleccionado es el formulado por Hsuan-Teh Hu y William C. Schnobrich en (Hu y Schnobrich 1989) el cual es un modelo de plasticidad no asociada independiente del tiempo para el concreto simple, en estado plano de esfuerzos.

Este capítulo presenta la formulación del modelo de plasticidad seleccionado para su posterior implementación con el método de los elementos finitos. También se presentan las modificaciones realizadas al modelo en esta tesis.

4.1. Preliminares

Los ensayos practicados al concreto demuestran que se presentan deformaciones que son recuperables y deformaciones que son permanentes. Las deformaciones recuperables se han representado usando modelos elásticos y las no recuperables por medio de modelos de plasticidad.

Inicialmente los modelos usados fueron de plasticidad perfecta pero posteriormente se usaron modelos de plasticidad con endurecimiento – ablandamiento, logrando de esta manera una representación más general y aproximada. (Hu y Schnobrich 1989).

Para explicar el modelo elasto – plástico con endurecimiento – ablandamiento, varios conceptos deben ser definidos previamente:

- Dominio elástico. Es el conjunto de todos los estados de esfuerzos para los cuales el comportamiento del material es elástico.
- Superficie de fluencia. Es el límite o contorno del dominio elástico.
- Función de fluencia. Es la expresión mediante la cual se define la superficie de fluencia inicial y las subsecuentes para cada estado de esfuerzo.
- Leyes de endurecimiento – ablandamiento. Definen el tamaño de las superficies de fluencia subsecuentes en los procesos de carga plástica. El tamaño de la superficie de fluencia en este modelo será descrito mediante endurecimiento

isótopo, despreciando el efecto Bauschinger o endurecimiento cinemático, lo cual, en un proceso de carga mono tónico del concreto resulta adecuado.

- Reglas de flujo. Determinan la evolución de las deformaciones plásticas.
- Curva equivalente uniaxial de esfuerzo – deformación.
- Módulo de endurecimiento – ablandamiento plástico.
- Ecuaciones constitutivas para el concreto.

A continuación se desarrollará en detalle cada uno de estos conceptos para el modelo seleccionado.

4.2. Función de fluencia

Las superficies de fluencia inicial y las subsiguientes se deben expresar mediante la misma ecuación general. La función de fluencia $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma})$ está compuesta por dos partes, la primera es función escalar $F(\boldsymbol{\sigma})$ del tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ y la segunda es un parámetro de endurecimiento – ablandamiento escalar $\bar{\sigma}$ denominado esfuerzo uniaxial equivalente. La función $F(\boldsymbol{\sigma})$ recibe el nombre de función de carga y el parámetro $\bar{\sigma}$ es un valor de comparación. Un estado de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ es elástico si:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}) = F(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma} \leq 0 \quad (4-1)$$

En el momento en el cual el valor de la función $F(\boldsymbol{\sigma})$ sea igual a $\bar{\sigma}$, la fluencia tendrá lugar.

Las componentes del tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ en un estado plano de esfuerzos y en notación de Voigt, se pueden expresar como una matriz columna de la forma:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T \quad (4-2)$$

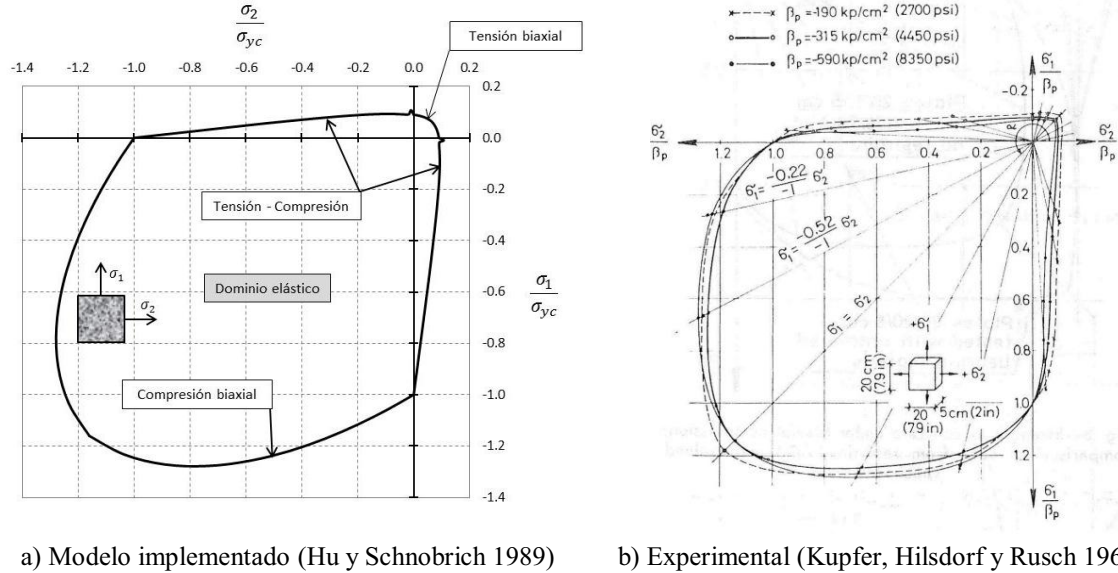
El esfuerzo uniaxial equivalente $\bar{\sigma}$ es función de la historia de carga del material y sus propiedades de endurecimiento – ablandamiento.

En este modelo la función de fluencia utilizada es la propuesta por (Hand, Pecknold y Schnobirch 1972) y modificada por (Hu y Schnobirch 1989). $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma})$ está definida en tres rangos diferentes según el tensor de esfuerzos: Compresión – compresión (compresión biaxial), tensión – compresión y tensión – tensión (tensión biaxial).

La función de fluencia se puede representar gráficamente en el espacio de los esfuerzos principales donde se definen los estados de esfuerzos de tensión biaxial en el primer cuadrante, compresión biaxial en el tercer cuadrante y tensión – compresión en los cuadrantes dos y cuatro.

La función de fluencia en los tres rangos es producto de la experimentación y fue formulada específicamente para representar el comportamiento del concreto simple.

En la **Figura 4-1** se muestra la superficie de fluencia del modelo implementado y se compara con la superficie de fluencia obtenida experimentalmente por (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969).



a) Modelo implementado (Hu y Schnobrich 1989)

b) Experimental (Kupfer, Hilsdorf y Rusch 1969)

Figura 4-1: Superficie de fluencia

La superficie de fluencia mostrada en la figura **Figura 4-1a**) corresponde a la superficie de fluencia inicial, del material virgen, es decir sin ningún proceso de carga plástica previo.

Una vez se presenten procesos de carga en el rango plástico, la superficie de fluencia se ve alterada debido a que $\bar{\sigma}$ se actualiza y en el caso de este modelo, disminuye debido al ablandamiento (en los rangos de compresión biaxial y tensión – compresión, en tensión biaxial no hay alteración debido a que se considera plasticidad perfecta.). Esto implica que las superficies de fluencia posteriores a un proceso de carga plástica serán más reducidas para los rangos de compresión biaxial y tensión compresión.

En la

b)

Figura 4-2 se muestra la evolución de la superficie de fluencia, nótese que la parte de tensión biaxial no sufre alteración. En la parte a) de esta figura se representa la superficie de fluencia y su evolución en el espacio de los esfuerzos principales. Adicionalmente en la parte **b)** se muestra el esfuerzo uniaxial equivalente. El ablandamiento que presentan las curvas 1 y 2 se manifiesta en la contracción que se observa en la superficie de fluencia. La curva 3 corresponde a un modelo de plasticidad perfecta, por este motivo, la superficie de fluencia en la parte de tensión biaxial, no sufre ni expansión ni contracción.

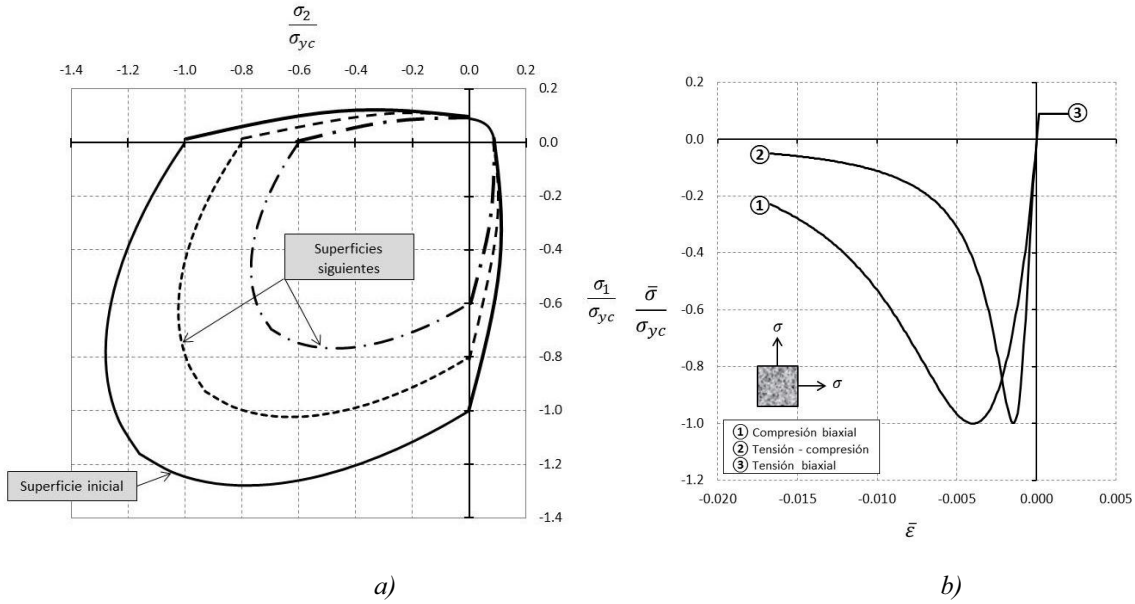


Figura 4-2: Evolución de la superficie de fluencia. a) Representación en el espacio de los esfuerzos principales. b) representación por medio del esfuerzo uniaxial equivalente.

4.2.1. Función de fluencia en tensión biaxial

El modelo considera que no existe evolución de la superficie de fluencia en el rango de tensión biaxial, es decir que la relación esfuerzo deformación exhibe plasticidad perfecta.

Al no existir evolución de la superficie de fluencia, el valor de comparación es fijo y corresponde al esfuerzo máximo en compresión del concreto $\bar{\sigma} = \sigma_{yc}$.

Para $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 > 0$, la superficie de fluencia se define como:

$$f = C_1 \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \tau_{oct} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \sigma_m \right) - \sigma_{yc} \leq 0 \quad (4-3)$$

Donde:

$$C_1 = 1 - 0.4019 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) + 0.008913 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \quad (4-4)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2$$

Esfuerzos en la base principal
(Estado plano de esfuerzos).

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Esfuerzo medio (Estado plano de esfuerzos).

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

Esfuerzo cortante octaédrico (Estado plano de esfuerzos).

$$\alpha = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}}$$

Relación entre el esfuerzo de fluencia en tensión y en compresión. Se recomienda usar $\alpha = 0.09$ (Hu y Schnobrich 1989)

4.2.2. Función de fluencia en tensión – compresión

Para el caso de tensión – compresión donde $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 < 0$, el modelo considera ablandamiento durante la carga plástica y la función de fluencia en este caso se define como:

$$f = C_2 \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(1+\alpha)}{\alpha} \tau_{oct} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \sigma_m \right) - \bar{\sigma} \leq 0 \quad (4-5)$$

Donde:

$$C_2 = \begin{cases} 1 - 0.02886 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - 0.006657 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 - 0.0002443 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^3 & \text{si } -\infty < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < -0.103 \\ 1 + 6.339 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + 68.82 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 + 183.8 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^3 & \text{si } -0.103 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 0 \end{cases} \quad (4-6)$$

4.2.3. Función de fluencia en compresión biaxial

Para el caso de compresión biaxial, donde $\sigma_1 < 0$ y $\sigma_2 < 0$, el modelo considera ablandamiento durante la carga plástica. La función de fluencia en este caso se define como:

$$f = C_3 \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(2\beta-1)}{\beta} \tau_{oct} + 3 \frac{(\beta-1)}{\beta} \sigma_m \right) - \bar{\sigma} \leq 0 \quad (4-7)$$

Donde:

$$C_3 = 1 + 0.05848 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) - 0.05848 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \quad (4-8)$$

$$\beta = 1.16 \text{ (Hu y Schnobrich 1989)}$$

4.3. Reglas de flujo

Las componentes del tensor de deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$, pueden expresarse de forma matricial en notación de Voigt de la siguiente manera:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}\}^T \quad (4-9)$$

La cual se puede descomponer en la parte elástica $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e$ y la parte plástica $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p$ al igual que su incremento diferencial $d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e$ y $d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p$, de la forma:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p \\ d\{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e + d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p \end{aligned} \quad (4-10)$$

Sea la función de potencial plástico de la forma:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}) = G(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma} = 0 \quad (4-11)$$

El incremento diferencial de la deformación plástica $d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p$ se expresa como:

$$d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p = d\gamma \frac{\partial g}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} = d\gamma \frac{\partial G}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \quad (4-12)$$

Donde $d\gamma$ es el incremento diferencial del multiplicador plástico. Ésta es una variable que lleva consigo la historia de carga del material.

El gradiente de la superficie potencial $\frac{\partial g}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}}$ define la dirección del incremento del vector de deformación plástica $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_p$ y la magnitud es definida por el multiplicador plástico γ .

Debido a que el vector $\frac{\partial g}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}}$ es normal a la superficie potencial, el incremento en el vector de la deformación plástica es también normal a la función de potencial plástico g . Esta condición se denomina Ley de Normalidad.

Un caso particular de plasticidad resulta cuando $g = f$, caso que es llamado plasticidad con regla de flujo asociada. El modelo seleccionado para implementar, posee una regla de flujo no asociada, por lo tanto $g \neq f$.

Una regla de flujo asociada satisface los postulados de (Drucker 1950), (Drucker 1951) sobre estabilidad local material, sin embargo se ha encontrado que no satisface en gran medida muchos resultados experimentales, es por eso que se prefiere una regla de flujo no asociada.

Por otra parte usar una regla de flujo no asociada, viola los postulados mencionados, sin embargo aunque estos postulados proporcionan suficientes condiciones de estabilidad, se ha sugerido que no son condiciones estrictamente necesarias. (Mroz 1963).

Adicionalmente el uso de una regla de flujo no asociada permite obtener resultados numéricos acordes con resultados experimentales.

En este modelo se usan las reglas de flujo asociado y no asociado para formular las ecuaciones constitutivas para el concreto.

Para la regla de flujo no asociada, se utiliza la función de Von Misses, de la forma:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}) = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} - \bar{\sigma} = 0 \quad (4-13)$$

4.4. Curva uniaxial equivalente esfuerzo – deformación

Cuando la plastificación ocurre se requiere un parámetro que guíe la expansión o contracción de la superficie de fluencia en los rangos de compresión biaxial y tensión – compresión. La relación tensorial entre las tasas del esfuerzo y deformación $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ está asociada con la relación unidimensional entre el esfuerzo y la deformación equivalentes $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$.

Esta relación escalar varía dependiendo de la relación entre esfuerzos principales de la forma:

$$\bar{\sigma} = \frac{E_c \bar{\varepsilon}}{1 + (R + R_E - 2) \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_*}\right) - (2R - 1) \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_*}\right)^2 + R \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_*}\right)^3} \quad (4-14)$$

Donde:

$$R = \frac{R_E(R_\sigma - 1)}{(R_\varepsilon - 1)^2} - \frac{1}{R_\varepsilon} \quad \text{Razón de relación.} \quad (4-15)$$

$$R_E = \frac{E_c}{E_0} \quad \text{Razón modular.}$$

| | |
|---|---|
| $R_\sigma = \frac{\sigma_{yc}}{\sigma_f}$ | Razón de esfuerzos. |
| $R_\varepsilon = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_*}$ | Razón de deformaciones. |
| $E_0 = \frac{\sigma_{yc}}{\varepsilon_*}$ | Módulo secante. |
| $\varepsilon_* = q\varepsilon_0$ | Deformación correspondiente a σ_{yc} en la curva uniaxial equivalente esfuerzo deformación |
| ε_0 | Deformación correspondiente a σ_{yc} en un ensayo de compresión uniaxial. |
| E_c | Módulo de elasticidad inicial. |
| $\sigma_f \quad \varepsilon_f$ | Máximo esfuerzo y su deformación correspondiente en la curva uniaxial equivalente esfuerzo deformación. |

La variable q se definió para lograr que la curva uniaxial equivalente esfuerzo deformación sea única sin importar la relación entre los esfuerzos principales σ_1/σ_2 . La variable q se define como:

Para estados de esfuerzos de tensión – compresión, es decir $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 < 0$ se tiene:

si $-\infty < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < -0.103$:

$$q = \frac{\sigma_{yc}}{E_c \varepsilon_0} + \left(1 - \frac{\sigma_{yc}}{E_c \varepsilon_0}\right) \left[0.001231 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + 0.001469 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 + 0.0000134 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^3\right] \quad (4-16)$$

si: $-0.103 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 0$:

$$q = \frac{\sigma_{yc}}{E_c \varepsilon_0} + \left(1 - \frac{\sigma_{yc}}{E_c \varepsilon_0}\right) \left[1 + 13.96 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + 59.21 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 + 69.24 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^3\right] \quad (4-17)$$

Para el caso de compresión biaxial, es decir $\sigma_1 < 0$ y $\sigma_2 < 0$:

$$q = \frac{\sigma_{yc}}{E_c \varepsilon_0} + \left(1 - \frac{\sigma_{yc}}{E_c \varepsilon_0}\right) \left[1 + 1.782 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + 0.5936 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2\right] \quad (4-18)$$

Por otra parte, medir experimentalmente los valores de σ_f y ε_f es bastante complejo, debido a que la rama descendiente de la curva es fuertemente dependiente del ensayo, por lo que se propone usar valores para R_σ y R_ε indicados en la siguiente tabla:

| Variable | (Darwin y Pecknold 1974) | (Elwi y Murray 1979) |
|-----------------|--------------------------|----------------------|
| R_σ | 5 | 4 |
| R_ε | 4 | 4 |

Para esta tesis se usaron los valores de R_σ y R_ε propuestos por (Elwi y Murray 1979).

El módulo tangente uniaxial se puede obtener al derivar la ecuación (4-14) con respecto a la deformación uniaxial equivalente:

$$E_t = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{E_c \left[1 + (2R - 1) \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_*} \right)^2 - 2R \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_*} \right)^3 \right]}{\left[1 + (R + R_E - 2) \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_*} \right) - (2R - 1) \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_*} \right)^2 + R \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_*} \right)^3 \right]} \quad (4-19)$$

En la **Figura 4-3** se muestran gráficamente la relación uniaxial equivalente entre el esfuerzo y la deformación, para estados de esfuerzos de compresión biaxial y tensión – compresión.

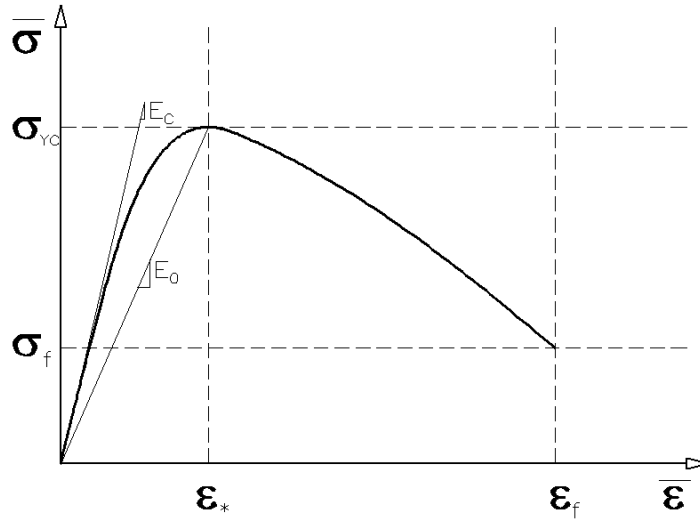


Figura 4-3: Curva uniaxial equivalente esfuerzo – deformación para compresión biaxial y tensión – compresión.

El modelo considera una primera fase de comportamiento elástico no lineal y superado el límite elástico, un comportamiento plástico no lineal. En esta tesis el modelo fue modificado consistentemente en conservar una relación lineal del comportamiento elástico.

Dicha modificación se explicará en detalle en el **Capítulo 5** de implementación.

En la **Figura 4-4** se muestran las curvas uniaxiales esfuerzo – deformación equivalente, para los rangos de compresión biaxial y tensión – compresión, variando la relación entre los esfuerzos principales.

Para los rangos de compresión biaxial y tensión – compresión, la relación entre los esfuerzos principales modifica el comportamiento de estas curvas, para el caso de tensión biaxial la curva es única y representa un comportamiento de plasticidad perfecta.

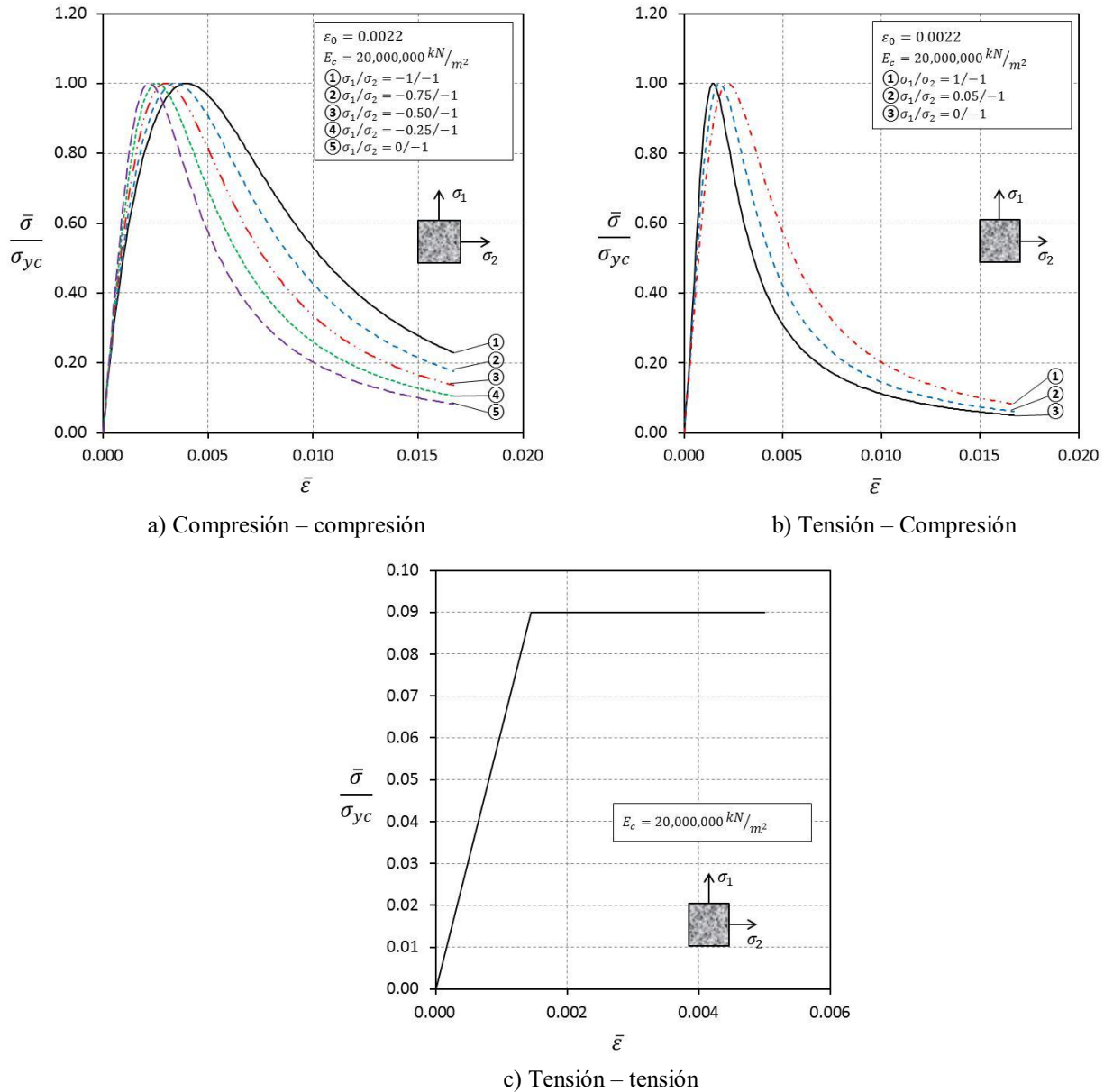


Figura 4-4: Curva uniaxial equivalente esfuerzo – deformación del modelo implementado.

Con el fin de conservar la estabilidad numérica del modelo, se considera que el comportamiento del concreto en tensión biaxial después del régimen elástico, es plástico perfecto. En el **Capítulo 3** se indicó que en este rango, el concreto presenta una rápida reducción del esfuerzo en la zona de fractura, lo que el modelo representa es el comportamiento hasta antes de iniciarse la fractura.

4.5. Módulo de endurecimiento plástico

Una vez construida la curva de esfuerzo – deformación uniaxial equivalente se requiere definir un módulo de endurecimiento plástico H que determine el tamaño de la superficie de fluencia, de la forma:

$$H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} \quad (4-20)$$

Donde:

$$d\bar{\varepsilon} = d\bar{\varepsilon}_e + d\bar{\varepsilon}_p \quad \begin{array}{l} \text{Incremento de la deformación equivalente uniaxial} \\ \text{y sus componentes elástica y plástica.} \end{array} \quad (4-21)$$

$$d\bar{\sigma} = d\bar{\sigma}_e + d\bar{\sigma}_p \quad \begin{array}{l} \text{Incremento del esfuerzo equivalente uniaxial y sus} \\ \text{componentes elástica y plástica.} \end{array}$$

Dividiendo las expresiones anteriores se obtiene una expresión para el módulo de endurecimiento plástico:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\bar{\sigma}} &= \frac{d\bar{\varepsilon}_e}{d\bar{\sigma}_e} + \frac{d\bar{\varepsilon}_p}{d\bar{\sigma}_p} \\ \frac{1}{E_t} &= \frac{1}{E_c} + \frac{1}{H} \\ H &= \frac{E_c E_t}{E_c - E_t} \end{aligned} \quad (4-22)$$

4.6. Ecuaciones constitutivas para el concreto

Una vez se cuenta con una regla de endurecimiento y una función de fluencia, las relaciones esfuerzo – deformación incrementales basadas en las reglas de flujo son aplicadas a un modelo material. Las ecuaciones constitutivas se pueden obtener a partir del módulo de endurecimiento plástico.

Al derivar la función de fluencia con respecto al tensor de esfuerzos se obtiene:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}) = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} d\{\sigma\}^T + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} d\bar{\varepsilon}_p = 0 \quad (4-23)$$

De la teoría de la elasticidad, el incremento de esfuerzo puede ser relacionado con el incremento de la deformación por medio de la ley generalizada de Hooke:

$$d\{\sigma\}^T = [C]_e d\{\varepsilon\}_e^T = [C]_e (d\{\varepsilon\}^T - d\{\varepsilon\}_p^T) \quad (4-24)$$

En donde:

$$[C]_e = \frac{E_c}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

En donde ν es la relación de Poisson para el concreto. Substituyendo la ecuación (4-20) y (4-24) en la (4-23)₂ se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} [C]_e (d\{\varepsilon\}^T - d\{\varepsilon\}_p^T) + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} H d\bar{\varepsilon}_p = 0 \quad (4-26)$$

Substituyendo la ecuación (4-12) y $\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = -1$ en la ecuación (4-26) se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} [C]_e \left(d\{\varepsilon\}^T - d\gamma \frac{\partial G}{\partial \{\sigma\}^T} \right) - H d\bar{\varepsilon}_p = 0 \quad (4-27)$$

El trabajo realizado durante la deformación plástica se puede escribir como:

$$dW_p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}_p = \{\sigma\} d\{\varepsilon\}_p^T \quad (4-28)$$

Reescribiendo la ecuación (4-28) y despejando el incremento de la deformación plástica equivalente se tiene:

$$d\bar{\varepsilon}_p = \frac{\{\sigma\} d\{\varepsilon\}_p^T}{\bar{\sigma}} = \frac{\{\sigma\} d\gamma \frac{\partial G}{\partial \{\sigma\}^T}}{\bar{\sigma}} = d\gamma \frac{G}{\bar{\sigma}} \quad (4-29)$$

De la ecuación (4-29) se despeja el incremento del multiplicador plástico:

$$d\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} [C]_e d\{\varepsilon\}^T}{H \frac{G}{\bar{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} [C]_e \frac{\partial G}{\partial \{\sigma\}^T}} \quad (4-30)$$

Finalmente al sustituir la ecuación (4-30) en (4-24) se obtiene la ecuación constitutiva incremental para el concreto simple:

$$d\{\sigma\}^T = [C]_{ep} d\{\varepsilon\}^T = ([C]_e - [C]_p) d\{\varepsilon\}^T \quad (4-31)$$

donde:

$$[C]_p = \frac{[C]_e \frac{\partial G}{\partial \{\sigma\}^T} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} [C]_e}{H \frac{G}{\bar{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} [C]_e \frac{\partial G}{\partial \{\sigma\}^T}} \quad (4-32)$$

Por ser un modelo de plasticidad no asociada, la función G es diferente de la función F , lo que genera que el tensor constitutivo elasto plástico escrito en forma matricial, resulte en una matriz no simétrica, esto a su vez implica que el solucionador usado para resolver el sistema de ecuaciones a nivel de la estructura, sea no simétrico.

En el modelo implementado se usará un solucionador no simétrico, aunque existe una manera de simetrizar el tensor, se optó por dejarlo como se expresa en las ecuaciones (4-31) y (4-32).

En la ecuación (4-32) se muestra el tensor constitutivo plástico escrito en forma matricial, está además en función de las derivadas de las funciones G y F con respecto al tensor de esfuerzos. Se requiere entonces calcular las derivadas mencionadas para obtener este tensor y posteriormente obtener el tensor constitutivo elastoplástico.

A continuación se muestran las Derivadas de la función F con respecto al tensor de esfuerzos en la base principal:

- Derivadas de la función F para tensión biaxial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \left[1 - 0.4019 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right. \right. \\ + 0.008913 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \left. \right] \left[(1 + \alpha) \frac{1}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} (2\sigma_1 - \sigma_2) \right. \\ + (1 - \alpha) \left. \right] \\ + \left[\frac{0.4019 \sigma_2}{\sigma_1^2} \right. \\ + 2(0.008913) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \left(-\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right) \left. \right] \left[(1 + \alpha) \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \right. \\ + (1 - \alpha)(\sigma_1 + \sigma_2) \left. \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

(4-33)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \left[1 - 0.4019 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right. \right. \\ + 0.008913 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \left. \right] \left[(1 + \alpha) \frac{1}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} (-\sigma_1 + 2\sigma_2) \right. \\ + (1 - \alpha) \left. \right] \\ + \left[-0.4019 \left(\frac{1}{\sigma_1} \right) \right. \\ + 2(0.008913) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \left(\frac{1}{\sigma_1} \right) \left. \right] \left[(1 + \alpha) \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \right. \\ + (1 - \alpha)(\sigma_1 + \sigma_2) \left. \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

- Derivadas de la función F para tensión – compresión si $-\infty < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < -0.103$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \left[1 + 0.02886 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - 0.006657 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 0.0002443 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^3 \right] \left[(1 + \alpha) \frac{1}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} (2\sigma_1 - \sigma_2) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha) \right] \right. \\ \left. + \left[0.02886 \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} + 2(0.006657) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \left(-\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - 3(0.0002443) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \left(-\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right) \right] \left[(1 + \alpha) \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha)(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \right\} \end{aligned}$$

(4-34)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \left[1 + 0.02886 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - 0.006657 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 0.0002443 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^3 \right] \left[(1 + \alpha) \frac{1}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} (-\sigma_1 + 2\sigma_2) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha) \right] \right. \\ \left. + \left[-0.02886 \frac{1}{\sigma_1} - 2(0.006657) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \frac{1}{\sigma_1} \right. \right. \\ \left. \left. - 3(0.0002443) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \left(\frac{1}{\sigma_1} \right) \right] \left[(1 + \alpha) \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha)(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \right\} \end{aligned}$$

- Derivadas de la función F para tensión – compresión si $-0.103 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \left[1 + 6.339 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + 68.83 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 183.8 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^3 \right] \left[(1 + \alpha) \frac{1}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} (2\sigma_1 - \sigma_2) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha) \right] \right. \\ \left. + \left[6.339 \left(\frac{1}{\sigma_2} \right) + 2(68.83) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(\frac{1}{\sigma_2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 3(183.8) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \left(\frac{1}{\sigma_2} \right) \right] \left[(1 + \alpha) \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha)(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4-35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \left[1 + 6.339 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + 68.83 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 183.8 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^3 \right] \left[(1 + \alpha) \frac{1}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} (-\sigma_1 + 2\sigma_2) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha) \right] \left[-6.339 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} \right) + 2(68.83) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 3(183.8) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} \right) \right] \left[(1 + \alpha) \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha)(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \right\} \end{aligned}$$

- Derivadas de la función F para compresión biaxial:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{\beta} \left\{ \left[1 + 0.05848 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. - 0.05848 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right] \left[\frac{(2\beta - 1)}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} (2\sigma_1 - \sigma_2) \right. \right. \\
 \left. \left. + (\beta - 1) \right] \right. \\
 \left. + \left[0.05848 \left(\frac{1}{\sigma_2} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. - 2(0.05848) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} \right) \right] \left[(2\beta - 1) \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \right. \right. \\
 \left. \left. + (\beta - 1)(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4-36}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{\beta} \left\{ \left[1 + 0.05848 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. - 0.05848 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right] \left[\frac{(2\beta - 1)}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} (2\sigma_2 - \sigma_1) \right. \right. \\
 \left. \left. + (\beta - 1) \right] \right. \\
 \left. + \left[-0.05848 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + 2(0.05848) \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^3} \right) \right] \left[(2\beta - 1) \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \right. \right. \\
 \left. \left. + (\beta - 1)(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Finalmente se ordena el vector resultante para cada uno de los casos:

$$\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-37)$$

Ahora corresponde calcular las derivadas de la función G con respecto al tensor de esfuerzos en la base principal

- Derivadas de la función G para todos los casos:

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}}(2\sigma_1 - \sigma_2) \quad (4-38)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}}(-\sigma_1 + 2\sigma_2)$$

Finalmente se ordena el vector resultante con las derivadas de la función G :

$$\frac{\partial G}{\partial \{\sigma\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial G}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial G}{\partial \sigma_2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-39)$$

Originalmente el modelo planteado está escrito de forma explícita, lo cual no permite la verificación del equilibrio a nivel de la estructura. Al realizar la implementación de este modelo en el programa de elementos finitos, se usó la teoría expuesta en la formulación, pero en forma implícita y de manera iterativa, para asegurar que el equilibrio se cumpla.

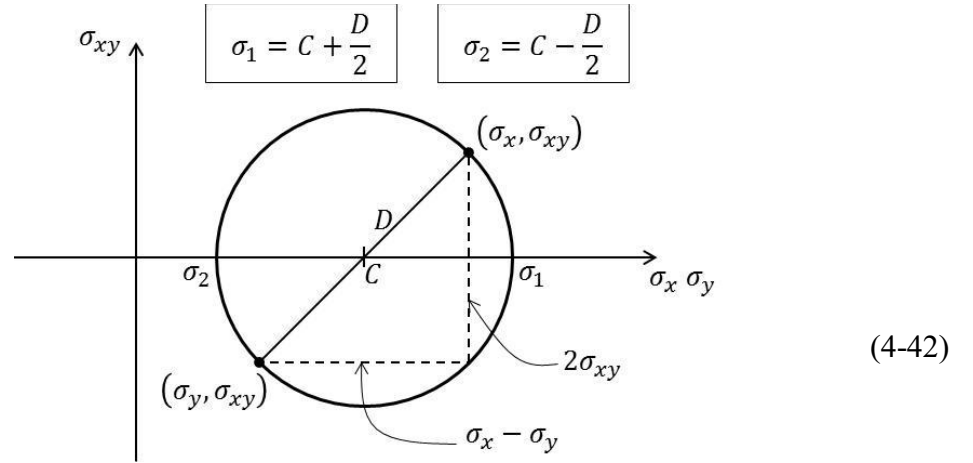
Para efectuar esto, se requiere calcular un vector N , en cual está en función de las derivadas de la función de fluencia pero con respecto al tensor de esfuerzo en una base cualquiera y no en principales como las calculadas anteriormente. El cálculo del vector N se muestra en detalle en el **Capítulo 5**, por ahora se calcularán las derivadas.

$$N = \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (4-40)$$

Usando la regla de la cadena, los términos del vector N se pueden expresar como:

$$N = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{xy}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{xy}} \end{array} \right\} \quad (4-41)$$

Donde:



Las derivadas de F con respecto al tensor de esfuerzos en la base principal ya se calcularon anteriormente, a continuación se muestran las derivadas del tensor en base principal con respecto al tensor en la base general:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right]^{-\left(\frac{1}{2}\right)} (\sigma_x - \sigma_y) \\
\frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right]^{-\left(\frac{1}{2}\right)} (\sigma_x - \sigma_y) \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right]^{-\left(\frac{1}{2}\right)} (\sigma_x - \sigma_y) \\
\frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_y} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right]^{-\left(\frac{1}{2}\right)} (\sigma_x - \sigma_y) \\
\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{xy}} &= 2 \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right]^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \sigma_{xy} \\
\frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{xy}} &= -2 \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right]^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \sigma_{xy}
\end{aligned} \tag{4-43}$$

Adicionalmente, no se usará la expresión **(4-30)** para el cálculo del incremento en el multiplicador plástico $d\gamma$. En lugar de esto se desarrolla un proceso iterativo que garantiza que el valor encontrado para $d\gamma$ satisface la condición $f(\dots, d\gamma, \dots) = 0$.

La expresión **(4-29)** para el cálculo del incremento en la deformación plástica equivalente uniaxial también será modificada según (de Souza Neto, Peric y Owen, Computational Methods for Plasticity 2008).

En el **Capítulo 5** de implementación con elementos finitos se explicará en detalle el procedimiento y el orden de los cálculos así como la actualización de las variables históricas del material (Algoritmo de integración).